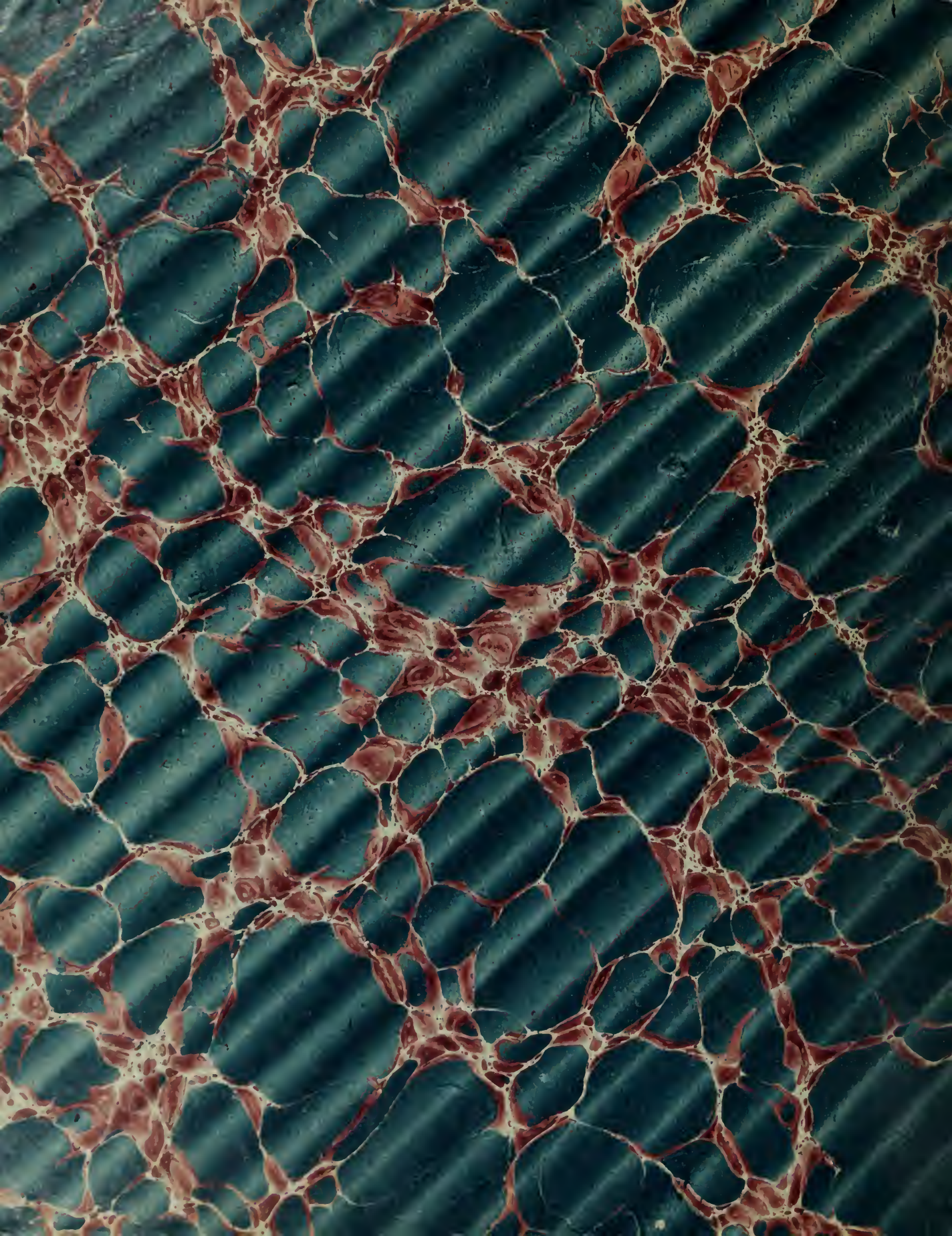
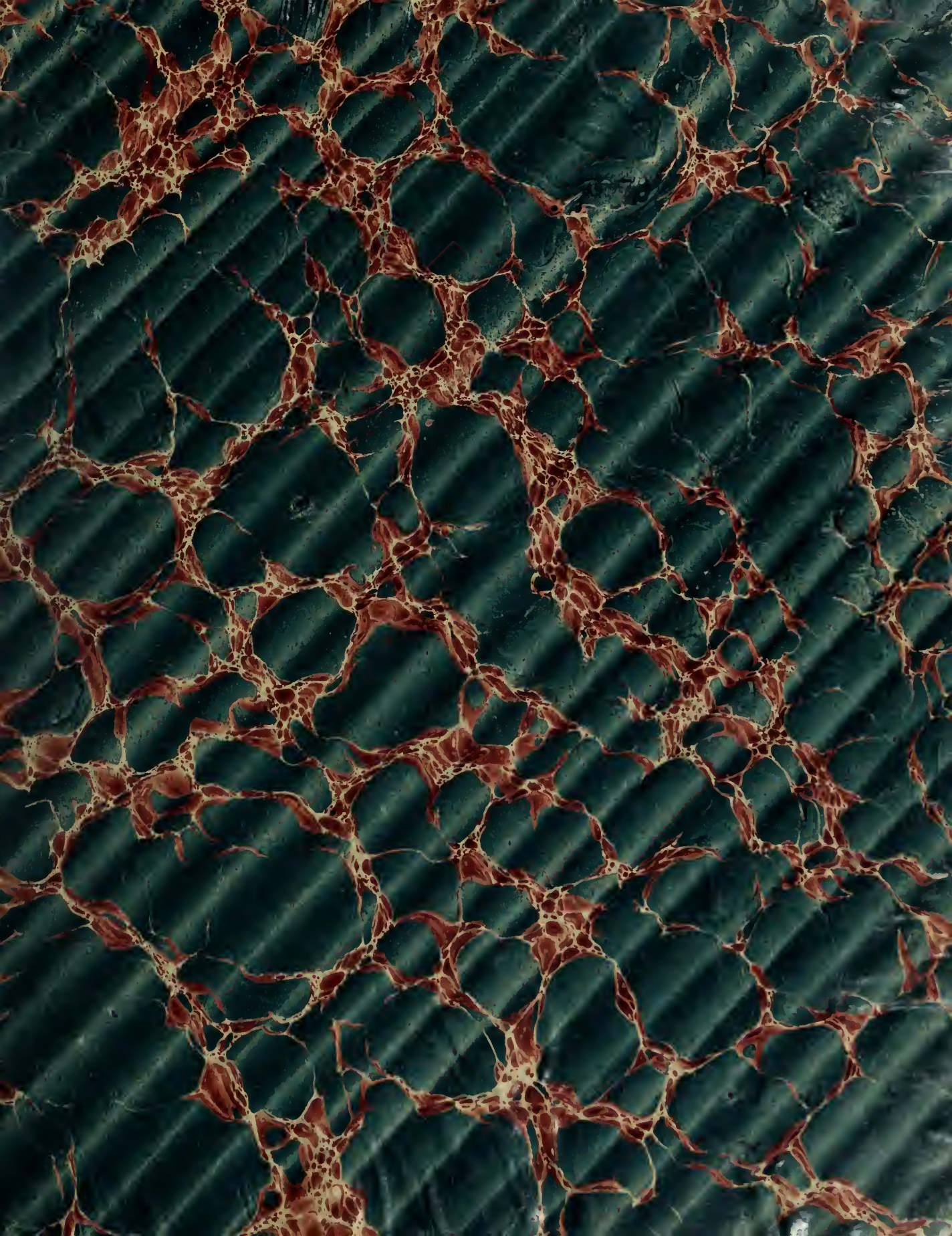




Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/revuedemathmat05pari

REVUE

DE

MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

GA
1
R
291725
9
30

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**332.** — *On donne deux droites rectangulaires* D, D′ *et un cercle* C *tangent à ces deux droites.* 1° *Enveloppe des paraboles tangentes à* D *et à* D′ *et dont le foyer décrit* C. 2° *On mène par le foyer d'une de ces paraboles des droites parallèles à* D *et* D′. *Trouver le lieu des points de rencontre avec la directrice correspondante.*

1° Prenons les droites D et D′ pour axes de coordonnées ; l'équation du cercle C sera

$$x^2 + y^2 - 2R(x+y) + R^2 = 0.$$

D'autre part une parabole tangente aux axes a pour équation

$$\sqrt{ux} + \sqrt{vy} - 1 = 0$$

ou

$$f = (ux + vy - 1)^2 - 4uvxy = 0. \qquad (1)$$

Écrivons que le foyer de cette courbe est sur le cercle C. On aura le foyer en abaissant du point O une perpendiculaire sur la droite

$$ux + vy - 1 = 0$$

qui joint les points de contact de la parabole avec les deux axes.

On a pour coordonnées du foyer

$$x = \frac{u}{u^2+v^2}, \qquad y = \frac{v}{u^2+v^2};$$

en écrivant que ce point est sur le cercle C, on a

$$\varphi = R^2(u^2+v^2) - 2R(u+v) + 1 = 0. \qquad (2)$$

Il faut donc trouver l'enveloppe des courbes (1), $u$ et $v$ étant liés par la relation (2).

On doit pour cela éliminer $u$ et $v$ entre les équations (1) et (2) et la suivante :

$$\frac{f'_u}{f'_v} = \frac{\varphi'_u}{\varphi'_v}.$$

Cela revient à écrire que si l'on considère dans les équations (1) et (2) $u$ et $v$ comme des coordonnées courantes, ces deux équations représentent deux courbes tangentes.

Or pour écrire que ces deux courbes sont tangentes, nous écrirons la seconde

$$(R(u+v) - 1)^2 - 2R^2uv = 0;$$

nous aurons deux coniques tangentes aux deux axes ; nous pourrons mettre en évidence deux sécantes communes passant par le point de rencontre des cordes de contact

$$\frac{ux + vy - 1}{R(u+v) - 1} = \pm\sqrt{\frac{2xy}{R^2}},$$

et nous écrirons que l'une de ces droites est tangente au cercle (2).

Posons $a = \sqrt{\frac{2xy}{R^2}}$, et considérons la sécante

$$a(x - aR) + a(y - aR) + a - 1 = 0.$$

Pour qu'elle soit tangente au cercle, il faut que sa distance au centre $\left(\frac{1}{R}, \frac{1}{R}\right)$ soit égale au rayon $\frac{1}{R}$, ce qui donne

$$\frac{\frac{x - aR}{R} + \frac{y - aR}{R} + a - 1}{\sqrt{(x - aR)^2 + (y - aR)^2}} = \frac{1}{R}$$

ou, en simplifiant et en remplaçant ensuite $a$ par sa valeur,

$$2(x + y) - R = 2\sqrt{2xy},$$

$$(2(x + y) - R)^2 - 8xy = 0,$$

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{R}{2}\right)^2 - \frac{R^2}{4} = 0.$$

L'enveloppe est un cercle de rayon $\frac{R}{2}$ tangent aux deux axes.

Ce résultat peut être obtenu plus aisément au moyen des coordonnées tangentielles.

L'équation tangentielle d'une parabole tangente aux deux axes est

$$2buv + 2duw + 2evw = 0.$$

Son foyer est déterminé par les deux équations

$$-2dx + 2ey = 0,$$

$$-ex - dy + b = 0;$$

ou en tire

$$x = \frac{be}{e^2 + d^2}, \qquad y = \frac{bd}{e^2 + d^2},$$

et en écrivant que ce point est sur le cercle C, on a

$$b^2 - 2Rb(e + d) + (e^2 + d^2)R^2 = 0$$

ou

$$(Rd - b)^2 + (Re - b)^2 = b^2.$$

On peut poser

$$Rd - b = b\cos\varphi,$$

$$Re - b = b\sin\varphi,$$

de sorte que l'équation de la parabole peut s'écrire

$$Ruv + uw(1 + \cos\varphi) + vw(1 + \sin\varphi) = 0.$$

L'équation tangentielle de l'enveloppe est alors

$$w^2(u^2 + v^2) - (u + v)w + Ruv)^2 = 0,$$

ou, en divisant par $uv$,

$$R^2uv + 2Rw(u + v) + 2w^2 = 0.$$

Cette équation peut s'écrire

$$\left[w + \frac{R}{2}(u + v)\right]^2 - \frac{R^2}{4}(u^2 + v^2) = 0;$$

elle représente un cercle ayant pour centre le point $\left(\frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$ et pour rayon $\frac{R}{2}$.

2° Les points dont on cherche le lieu sont les symétriques du foyer par rapport aux deux axes; il en résulte que le lieu cherché se compose des symétriques du cercle C par rapport aux deux axes.

E.-N. BARISIEN.

M. P. Paciu, à Bucarest, a résolu la même question.

**339.** — *En un point* P *de l'intersection de deux quadriques homofocales, on mène les normales aux deux surfaces ; ces normales rencontrent un même plan principal en deux points* Q *et* Q'. *Quand le point* P *décrit l'intersection des deux quadriques, les points* Q *et* Q' *décrivent des coniques qui sont polaires réciproques par rapport à la focale située dans le plan principal considéré.*

Soient les deux quadriques homofocales

$$\frac{x^2}{A+\lambda}+\frac{y^2}{B+\lambda}+\frac{z^2}{C+\lambda}-1=0, \qquad (S)$$

$$\frac{x^2}{A+\lambda'}+\frac{y^2}{B+\lambda'}+\frac{z^2}{C+\lambda'}-1=0, \qquad (S')$$

et $x_0, y_0, z_0$ les coordonnées d'un point P de leur intersection.

La normale en ce point à la surface S a pour équations

$$\frac{x-x_0}{\dfrac{x_0}{A+\lambda}}=\frac{y-y_0}{\dfrac{y_0}{B+\lambda}}=\frac{z-z_0}{\dfrac{z_0}{C+\lambda}};$$

elle rencontre le plan des $xy$ en un point Q ayant pour coordonnées dans ce plan

$$x=\frac{x_0(A-C)}{A+\lambda}, \qquad y=\frac{y_0(B-C)}{B+\lambda}. \qquad (1)$$

On aura le lieu de ce point en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre les équations (1) et les relations

$$\frac{x_0^2}{A+\lambda}+\frac{y_0^2}{B+\lambda}+\frac{z_0^2}{C+\lambda}-1=0,$$

$$\frac{x_0^2}{A+\lambda'}+\frac{y_0^2}{B+\lambda'}+\frac{z_0^2}{C+\lambda'}-1=0.$$

En éliminant d'abord $z^2$ entre ces deux équations, on obtient

$$\frac{x_0^2(A-C)}{(A+\lambda)(A+\lambda')}+\frac{y_0^2(B-C)}{(B+\lambda)(B+\lambda')}-1=0;$$

puis en remplaçant $x_0$ par $\dfrac{(A+\lambda)x}{A-C}$ et $y_0$ par $\dfrac{(B+\lambda)y}{B-C}$, on a le lieu du point Q :

$$\frac{x^2(A+\lambda)}{(A-C)(A+\lambda')}+\frac{y^2(B+\lambda)}{(B-C)(B+\lambda')}-1=0. \qquad (C)$$

Ce lieu est une conique C ayant pour axes $Ox$ et $Oy$. On voit de même que le lieu du point Q' est la conique

$$\frac{x^2(A+\lambda')}{(A-C)(A+\lambda)}+\frac{y^2(B+\lambda')}{(B-C)(B+\lambda)}-1=0. \qquad (C')$$

Il reste à démontrer que les coniques C et C' sont polaires réciproques par rapport à la focale

$$\frac{x^2}{A-C}+\frac{y^2}{B-C}-1=0. \qquad (F)$$

Cherchons la polaire réciproque de C par rapport à F.

Un point $(x', y')$ appartiendra à cette polaire réciproque si sa polaire par rapport à F,

$$\frac{xx'}{A-C}+\frac{yy'}{B-C}-1=0,$$

est tangente à C, c'est-à-dire si l'on a

$$\frac{(A-C)(A+\lambda')}{A+\lambda}\cdot\frac{x'^2}{(A-C)^2}+\frac{(B-C)(B+\lambda')}{B+\lambda}\cdot\frac{y'^2}{(B-C)^2}-1=0.$$

ou
$$\frac{x'^2(A+\lambda)}{(A-C)(A+\lambda)}+\frac{y'^2(B+\lambda')}{(B-C)(B+\lambda)}-1=0.$$

Cette condition exprime que le point $(x', y')$ est sur la conique $C'$. Il en résulte que $C'$ est la polaire réciproque de $C$ par rapport à $F$.

F. THÉVENOT.

Ont résolu cette question : MM. R. Lebeuf, lycée de Rouen, et G. Tzitzeica, à Bucarest.

## SOLUTION GÉOMÉTRIQUE

Soit $T$ la trace sur le plan principal de la tangente au point $P$ à l'intersection des deux quadriques $S$ et $S'$. Le plan $PQT$ est tangent en $P$ à $S'$, et la normale $PQ'$ est le lieu de ses pôles par rapport à toutes les quadriques homofocales. En particulier $Q'$ est le pôle de $QT$ par rapport à la focale $F$ du plan $TQQ'$.

Le théorème sera démontré si nous prouvons que $TQ$ enveloppe une conique et touche cette conique au point $Q$.

Prenons la polaire réciproque $\Sigma$ de la surface $S$ par rapport à $S'$; cette surface $\Sigma$ touche le plan $PQT$ en un point situé sur $PQ$, puisque la surface $S$ passe par le point $P$ et est tangente en ce point au plan $PQT$ et que le pôle du plan $PQT$ par rapport à $S'$ se trouve sur $PQ$.

On en conclut que le plan $PQT$ enveloppe la développable commune à $S'$ et $\Sigma$, et $PQ$ est génératrice de cette surface, Or $S'$ et $\Sigma$ ont mêmes plans principaux, ces plans contiennent les coniques doubles de la développable ; le point $Q$ décrit donc l'une de ces coniques, et la tangente en ce point à cette conique est la droite $QT$.

R. ESCOT, à Labastide-sur-Lhers.

---

**340.** — *Une courbe* (C) *tracée sur une sphère de rayon* 1 *est parcourue par un mobile avec une vitesse égale à l'unité. On considère cette courbe comme la directrice d'un cône ayant son sommet au point* O, *centre de la sphère* S *sur laquelle elle est tracée; soient* OM *une génératrice de ce cône et* $OM_1$ *la génératrice correspondante du cône supplémentaire,* $M_1$ *désignant le point de rencontre de cette génératrice et de la sphère* S. *Connaissant la vitesse* $\theta$ *du point* $M_1$, *calculer le rayon de courbure de la courbe* (C) *au point* M.

Les coordonnées $x, y, z$ d'un point M de la courbe C seront des fonctions du temps $t$, vérifiant les relations
$$x^2+y^2+z^2=1, \qquad (1)$$
$$x'^2+y'^2+z'^2=1. \qquad (2)$$

Le plan tangent suivant OM au cône de sommet O et de directrice (C) a pour équation
$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix}=0,$$
de sorte que la droite $OM_1$ a pour équation
$$\frac{X}{yz'-zy'}=\frac{Y}{zx'-xz'}=\frac{Z}{xy'-yx'}.$$

Remarquons que la somme des carrés des dénominateurs est égale à 1, car
$$(yz'-zy')^2+(zx'-xz')^2+(xy'-yx')^2=(x^2+y^2+z^2)(x'^2+y'^2+z'^2)-(xx'+yy'+zz')^2,$$

et en tenant compte des relations (1) et (2) et de la relation

$$xx' + yy' + zz' = 0, \qquad (3)$$

obtenue en différentiant (1), on voit que le second membre est égal à 1 : il en résulte que les coordonnées du point $M_1$ sont

$$x_1 = yz' - zy',$$
$$y_1 = zx' - xz',$$
$$z_1 = xy' - yx'.$$

La vitesse $\theta$ du point $M_1$ sera donc donnée par l'égalité

$$\theta^2 = (yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2 + (xy'' - yx'')^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(x''^2 + y''^2 + z''^2) - (xx'' + yy'' + zz'')^2.$$

Or en différentiant la relation (3), on a

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + xx'' + yy'' + zz'' = 0;$$

on en déduit

$$\theta^2 + 1 = x''^2 + y''^2 + z''^2.$$

La vitesse du point M étant constante, son accélération se réduit à l'accélération centripète $\frac{1}{\rho^2}$, $\rho$ désignant le rayon de courbure de la courbe C ; on en déduit

$$\theta^2 + 1 = \frac{1}{\rho^2},$$

$$\rho^2 = \frac{1}{\theta^2 + 1}.$$

AUGUSTIN WITZIG, lycée Condorcet.

MM. DARIÈS et ESCOT nous ont adressé d'autres solutions, reposant sur des considérations infinitésimales qui ne sauraient trouver place ici.

---

**341.** — *Étant donné un ellipsoïde* E *de centre* O *et un point* M, *on considère les sphères qui passent par* M *et sont circonscrites à un tétraèdre conjugué à* E. *Chercher :*

1° *Le lieu des centres* $\omega$ *de ces sphères ; ce lieu est un plan* $\Pi$ ;

2° *L'enveloppe de ce plan* $\Pi$ *quand* M *varie en décrivant une sphère concentrique à l'ellipsoïde* E. *Cas où cette sphère coïncide avec la sphère de Monge ;*

3° *L'enveloppe du plan* $\Pi$ *quand* M *décrit un plan donné ;*

4° *La surface engendrée par la droite* $\Delta$, *intersection du plan polaire de* M *par rapport à* E *et du plan* $\Pi$, *quand* M *décrit une droite passant par* O ;

5° *Par un point quelconque* P *passent une infinité de droites* $\Delta$ *qui engendrent un cône* C ; *trouver l'équation de ce cône ;*

6° *Lieu de* M *quand* $\Delta$ *tourne autour de* P ;

7° *Enveloppe* $\Sigma$ *des droites* $\Delta$ *contenues dans un plan donné. Lieu de* M *quand* $\Delta$ *reste tangente à* $\Sigma$.

1° Soient

$$E = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

l'équation de l'ellipsoïde et $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du point M.

Pour qu'une sphère

$$S = x^2 + y^2 + z^2 - 2\alpha x - 2\beta y - 2\gamma z + \delta = 0$$

soit circonscrite à un tétraèdre conjugué par rapport à E, il faut que le coefficient de $\lambda$ dans le discriminant de la fonction $E + \lambda S$ soit nul.

On trouve

$$\delta = a^2 + b^2 + c^2.$$

Écrivons en outre que la sphère passe par le point M ; on aura

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2\alpha x_0 - 2\beta y_0 - 2\gamma z_0 + \delta = 0,$$

ou

$$2\alpha x_0 + 2\beta y_0 + 2\gamma z_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

ce qui montre que le centre $(\alpha, \beta, \gamma)$ de la sphère décrit le plan qui a pour équation

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0. \qquad (\mathrm{II})$$

2° Supposons qu'on ait

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - \mathrm{R}^2 = 0;$$

l'équation du plan II peut s'écrire

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (\mathrm{R}^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Sa distance à l'origine est

$$\frac{\mathrm{R}^2 + a^2 + b^2 + c^2}{2\mathrm{R}};$$

on en conclut que ce plan enveloppe une sphère concentrique à l'ellipsoïde et ayant pour rayon cette distance.

Si la sphère que décrit le point M est la sphère de Monge, on a

$$\mathrm{R} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2},$$

et l'on voit que le rayon de la sphère enveloppe du plan II est égal aussi à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$ ; il en résulte que cette enveloppe est la sphère de Monge elle-même.

3° Supposons qu'on ait

$$f = \mathrm{A}x_0 + \mathrm{B}y_0 + \mathrm{C}z_0 + \mathrm{D} = 0, \qquad (1)$$

l'équation du plan II étant

$$\varphi = 2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0. \qquad (2)$$

On aura l'enveloppe de ce plan en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre les équations (1), (2) et les suivantes :

$$\frac{\varphi'_{x_0}}{f'_{x_0}} = \frac{\varphi'_{y_0}}{f'_{y_0}} = \frac{\varphi'_{z_0}}{f'_{z_0}}.$$

Ces dernières peuvent s'écrire

$$\frac{x - x_0}{\mathrm{A}} = \frac{y - y_0}{\mathrm{B}} = \frac{z - z_0}{\mathrm{C}};$$

on en tire, en désignant ces rapports par $-\lambda$,

$$x_0 = \mathrm{A}\lambda + x, \qquad y_0 = \mathrm{B}\lambda + y, \qquad z_0 = \mathrm{C}\lambda + z;$$

en transportant dans les équations (1) et (2), on a

$$(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2)\lambda + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda^2(\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2) - (a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

En éliminant $\lambda$ entre ces deux équations, on a l'équation de l'enveloppe

$$x^2 + y^2 + z^2 - (a^2 + b^2 + c^2) - \frac{(\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D})^2}{\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2 + \mathrm{C}^2} = 0.$$

Sous cette forme, on voit que cette surface est le lieu des points dont la distance au plan donné est égale à la longueur de la tangente issue de ces points à la sphère de Monge ; il en résulte que cette surface est un paraboloïde de révolution dont l'axe passe par le point O et est perpendiculaire au plan donné.

On peut obtenir aisément l'équation tangentielle de ce paraboloïde. En identifiant les deux équations

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0,$$

$$ux + vy + wz + r = 0,$$

on a
$$\frac{x_0}{u} = \frac{2y_0}{v} = \frac{2z_0}{w} = -\frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2}{r};$$

éliminons $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre ces équations et la suivante :
$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0;$$
on obtient sans difficulté
$$D^2(u^2 + v^2 + w^2) + (Au + Bv + Cw)(Au + Bv + Cw)(a^2 + b^2 + c^2) - 2Dr = 0.$$

On reconnaît l'équation tangentielle d'un paraboloïde de révolution dont le foyer a pour équation
$$(Au + Bv + Cw)(a^2 + b^2 + c^2) - 2Dr = 0,$$
et dont l'axe a pour paramètres directeurs A, B, C (*).

4° La droite $\Delta$ a pour équations
$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0, \qquad (3)$$
$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Si l'on désigne par $l$, $m$, $n$ les paramètres directeurs de la droite passant par l'origine que doit décrire le point M, on aura le lieu de la droite $\Delta$ en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre les équations (3) et les équations
$$\frac{x_0}{l} = \frac{y_0}{m} = \frac{z_0}{n}.$$

On obtient aisément
$$\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}\right)\left[(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{lx}{a^2} + \frac{my}{b^2} + \frac{nz}{c^2}\right) - 2(lx + my + nz)\right] + (l^2 + m^2 + n^2) = 0.$$

Cette équation représente un cylindre hyperbolique dont les plans directeurs sont mis en évidence.

5° Soient $x'$, $y'$, $z'$ les coordonnées du point P; écrivons que la droite $\Delta$ passe par le point P; on a
$$\frac{x'x_0}{a^2} + \frac{y'y_0}{b^2} + \frac{z'z_0}{c^2} - 1 = 0, \qquad (4)$$
$$2x'x_0 + 2y'y_0 + 2z'z_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

On aura l'équation du lieu de la droite $\Delta$ en éliminant $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre les équations (3) et (4).

En retranchant les équations (4) respectivement des équations (3), on a
$$\frac{x_0(x - x')}{a^2} + \frac{y_0(y - y')}{b^2} + \frac{z_0(z - z')}{c^2} = 0,$$
$$x_0(x - x') + y_0(y - y') + z_0(z - z') = 0,$$
d'où l'on tire
$$\frac{x_0(x - x')}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{y_0(y - y')}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \frac{z_0(z - z')}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}};$$

(*) En effet, pour qu'un plan $P(ux + vy + wz + r = 0)$ soit tangent à un paraboloïde de révolution ayant pour foyer un point $F(\alpha, \beta, \gamma)$ et pour plan tangent au sommet un plan $P_0(u_0x + v_0y + w_0z + r_0 = 0)$, il faut et il suffit que le plan P soit perpendiculaire au plan passant par le point F et par l'intersection des plans P et $P_0$.

On trouve ainsi la condition
$$u^2 + v^2 + w^2 - \frac{(uu_0 + vv_0 + ww_0)(u\alpha + v\beta + w\gamma + r)}{u_0\alpha + v_0\beta + w_0\gamma + r_0} = 0,$$
qui est l'équation tangentielle du paraboloïde.

on a ainsi des valeurs proportionnelles à $x_0$, $y_0$, $z_0$ ; on les transportera dans une équation homogène obtenue en combinant les équations (4), c'est-à-dire dans l'équation

$$(2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0)\left(\frac{x'x_0}{a^2} + \frac{y'y_0}{b^2} + \frac{z'z_0}{c^2}\right) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)(a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{x'x_0}{a^2} + \frac{y'y_0}{b^2} + \frac{z'z_0}{c^2}\right)^2 = 0 ;$$

on obtiendra l'équation d'un cône du quatrième degré.

6° Le lieu cherché a pour équations les équations (4) où l'on y considère $x_0$, $y_0$, $z_0$ comme coordonnées courantes.

La première représente un plan, la deuxième une sphère ; le lieu est un cercle.

7° Considérons toutes les droites $\Delta$ qui se trouvent dans un plan donné Q'

$$u'x + v'y + w'z + r' = 0 ;$$

nous allons chercher l'équation tangentielle de l'enveloppe de ces droites, c'est-à-dire la condition pour qu'un plan Q

$$ux + vy + wz + r = 0$$

rencontre le plan Q' suivant une droite $\Delta$.

Il faut pour cela qu'on puisse déterminer des nombres $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$, $\mu'$ en sorte qu'on ait

$$\lambda(ux + vy + wz + r) + \lambda'(u'x + v'y + w'z + r') \equiv \frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1,$$

$$\mu(ux + vy + wz + r) + \mu'(u'x + v'y + w'z + r') \equiv 2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

On en déduit les égalités

$$\lambda u + \lambda' u' = \frac{x_0}{a^2}, \qquad \mu u + \mu' u' = 2x_0,$$

$$\lambda v + \lambda' v' = \frac{y_0}{b^2}, \qquad \mu v + \mu' v' = 2y_0,$$

$$\lambda w + \lambda' w' = \frac{z_0}{c^2}, \qquad \mu w + \mu' w' = 2z_0,$$

$$\lambda r + \lambda' r' = -1, \qquad \mu r + \mu' r' \equiv -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2).$$

En éliminant $\lambda$, $\lambda'$, $\mu$, $\mu'$, $x_0$, $y_0$, $z_0$ entre ces équations, on aura l'équation tangentielle de l'enveloppe.

Les trois premières équations de chaque groupe donnent

$$\begin{vmatrix} u & u' & \frac{x_0}{a^2} \\ v & v' & \frac{y_0}{b^2} \\ w & w' & \frac{z_0}{c^2} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & u' & x_0 \\ v & v' & y_0 \\ w & w' & z_0 \end{vmatrix} = 0,$$

ou, en posant

$$A = vw' - wv', \qquad B = wu' - uw', \qquad C = uv' - vu',$$

$$\frac{Ax_0}{a^2} + \frac{By_0}{b^2} + \frac{Cz_0}{c^2} = 0,$$

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 ;$$

on en tire

$$\frac{Ax_0}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}} = \frac{By_0}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} = \frac{Cz_0}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}}$$

ou
$$x_0 = \frac{h}{A}\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right), \qquad y_0 = \frac{h}{B}\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right), \qquad z_0 = \frac{h}{C}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right).$$

Portons ces valeurs dans les deux équations

$$\begin{vmatrix} u & u' & \frac{x_0}{a^2} \\ v & v' & \frac{y_0}{b^2} \\ r & r' & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & u' & 2x_0 \\ v & v' & 2y_0 \\ r & r' & -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) \end{vmatrix} = 0$$

et éliminons $h$ entre les deux équations obtenues ; on a une équation du quatrième degré par rapport à $u$, $v$, $w$, $r$ qui est l'équation tangentielle d'une courbe de quatrième classe.

On aura le lieu que décrit le point M quand $\Delta$ reste dans le plan Q', en écrivant que les trois plans

$$u'x + v'y + w'z + r' = 0,$$

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} - 1 = 0,$$

$$2xx_0 + 2yy_0 + 2zz_0 - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) = 0$$

passent par une même droite.

On a les deux conditions

$$\begin{vmatrix} u' & v' & w' \\ \frac{x_0}{a^2} & \frac{y_0}{b^2} & \frac{z_0}{c^2} \\ x_0 & y_0 & z_0 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u' & v' & r' \\ \frac{x_0}{a^2} & \frac{y_0}{b^2} & -1 \\ 2x_0 & 2y_0 & -(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2) \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$u'y_0z_0\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right) + v'z_0x_0\left(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\right) + w'x_0y_0\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) = 0,$$

$$2r'x_0y_0\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right) + 2(u'y_0 - v'x_0) - (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + a^2 + b^2 + c^2)\left(\frac{u'y_0}{b^2} - \frac{v'x_0}{a^2}\right) = 0.$$

Le point M décrit donc l'intersection de ces deux surfaces, dont la première est un cône du second degré qui contient les trois axes et la seconde est une surface du troisième degré; ces deux surfaces ont en commun l'axe Oz, et la projection de leur intersection sur le plan des $xy$ est du quatrième degré.

Remarquons en terminant que l'ensemble des droites $\Delta$ constitue un complexe du quatrième ordre dont on pourrait avoir l'équation en coordonnées plückèriennes; on en déduirait aisément le cône et la courbe du complexe relatifs à un point ou à un plan.

HUGON, à Nîmes.

---

**342.** — *Trouver le lieu des foyers des sections faites dans un paraboloïde par des plans passant par une droite fixe parallèle à l'axe.*

Soient
$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0,$$
$$y - b = 0, \qquad z - c = 0$$

les équations du paraboloïde et de la droite fixe donnée.

Soit un plan quelconque passant par la droite

$$y - b - m(z - c) = 0;$$

ce plan coupe le paraboloïde suivant une parabole, dont le foyer s'obtiendra en écrivant que le cône circonscrit au paraboloïde ayant pour sommet ce point est coupé par le plan sécant suivant deux droites isotropes.

On devra donc avoir d'abord, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ désignant les coordonnées du foyer,

$$\beta - b - m(\gamma - c) = 0; \tag{1}$$

en outre, il faut écrire que

$$\left(\frac{\beta y}{p} + \frac{\gamma z}{q} - x\right)^2 - \left(\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q}\right)\left(\frac{\beta^2}{p} + \frac{\gamma^2}{q} - 2\alpha\right) - S(x^2 + y^2 + z^2)$$

est divisible par $y - mz$.

On remplacera pour cela $y$ par $mz$ et on écrira que le résultat est identiquement nul en $x$ et $z$.

On trouve aisément

$$S = 1,$$

$$\frac{\beta m}{p} + \frac{\gamma}{q} = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{m^2}{p} + \frac{1}{q}\right)\left(\frac{\beta^2}{p} + \frac{\gamma^2}{q} - 2\alpha\right) + (m^2 + 1) = 0. \tag{3}$$

On aurait le lieu du foyer en éliminant $m$ entre les équations (1), (2) et (3); il sera préférable de résoudre ces trois équations par rapport à $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; on aura les coordonnées d'un point du lieu en fonction rationnelle d'un paramètre, ce qui montre que le lieu est une courbe unicursale.

On résout d'abord aisément les équations (1) et (2) par rapport à $\beta$ et $\gamma$; l'équation (3) donne ensuite $\alpha$.

On trouve

$$\alpha = \frac{(b - mc)^2 + pq(m^2 + 1)}{qm^2 + p},$$

$$\beta = \frac{p(b - mc)}{qm^2 + p},$$

$$\gamma = \frac{-qm(b - mc)}{qm^2 + p}.$$

On voit ainsi que le lieu est une conique; c'est une ellipse si $p$ et $q$ sont de même signe, c'est-à-dire si le paraboloïde est elliptique; c'est une hyperbole si le paraboloïde est hyperbolique.

On pourrait facilement trouver le plan de la courbe et ses éléments.

AUDIBERT, à Marseille.

(Autre solution par M. Hugon (Nîmes.)

---

**343.** — *Étant donné un système de quadriques homofocales et un point* P *dans l'espace, déterminer :*

1° *Le lieu des projetantes du point* P *sur ses plans polaires par rapport aux quadriques du système ;*

2° *Le lieu, relativement à l'une quelconque des quadriques, des droites qui passent en* P *et sont perpendiculaires sur leurs polaires ;*

3° *Le lieu des normales menées de* P *à toutes les quadriques données ;*

4° *Le lieu, relativement à l'une quelconque des quadriques, des droites passant en* P *et qui sont telles que les normales aux points de contact des plans tangents menés par chacune d'elles sont dans un même plan ;*

5° *Le lieu, relativement à l'une quelconque des quadriques, des droites passant en* P *et telles que l'une des sections faites par les plans passant par la droite ait cette droite pour axe.*

*On trouvera pour tous ces lieux un même cône équilatère du second ordre* V. *Expliquer pourquoi.*

*Montrer que la section, par un plan principal, du cône* V *est l'hyperbole d'Apollonius relative à la focale des quadriques située dans ce plan et à la projection du point* P, *sommet du cône, sur ce plan.*

Cherchons d'abord le lieu des droites qui passent par le point $P(\alpha, \beta, \gamma)$ et qui sont perpendiculaires à leurs conjuguées par rapport à la quadrique

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} - 1 = 0.$$

La droite conjuguée de la droite

$$\frac{x-\alpha}{l} = \frac{y-\beta}{m} = \frac{z-\gamma}{n} \qquad (\Delta)$$

a pour équations

$$\frac{\alpha x}{A} + \frac{\beta y}{B} + \frac{\gamma z}{C} - 1 = 0,$$

$$\frac{lx}{A} + \frac{my}{B} + \frac{nz}{C} = 0; \qquad (\Delta_1)$$

pour que ces droites $\Delta$ et $\Delta_1$ soient perpendiculaires, il faut qu'on ait

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{A} & \frac{\beta}{B} & \frac{\gamma}{C} \\ \frac{l}{A} & \frac{m}{B} & \frac{n}{C} \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{l} & \frac{\beta}{m} & \frac{\gamma}{n} \\ A & B & C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{\alpha}{l}(B-C) + \frac{\beta}{m}(C-A) + \frac{\gamma}{n}(A-B) = 0.$$

Par suite, le lieu de la droite $\Delta$ a pour équation

$$\frac{\alpha}{x-\alpha}(B-C) + \frac{\beta}{y-\beta}(C-A) + \frac{\gamma}{z-\gamma}(A-B) = 0. \qquad (\Gamma)$$

Cette équation représente un cône équilatère qui contient les parallèles aux axes menées par le point P.

Ce cône est le même pour toutes les quadriques homofocales à la quadrique donnée : nous allons établir qu'il constitue le lieu de toutes les droites considérées aux différents numeros de la question.

**1°** Soit une droite PA perpendiculaire au plan polaire Q du point P par rapport à une quadrique de la série. La droite conjugée de PA est dans le plan Q ; elle est donc perpendiculaire à PA, ce qui prouve que PA est sur le cône $\Gamma$.

**3°** Soit une normale PB à l'une des quadriques, B étant le pied de cette normale ; la droite conjuguée de PB est dans le plan tangent en B à la quadrique ; elle est donc perpendiculaire à PB ; PB est sur le cône $\Gamma$.

**4°** Menons par une droite PC des plans tangents à l'une des quadriques ; soient M et M' les points de contact. Si les normales en M et M' à ces plans tangents se rencontrent, le plan de ces deux normales est perpendiculaire à l'intersection PC des deux plans tangents ; il en résulte que la droite MM', droite conjuguée de PC, est perpendiculaire à PC ; PC est donc sur le cône $\Gamma$.

5° Supposons qu'une droite PD soit axe de la conique section d'une quadrique par un plan Q passant par PD ; soient A et A′ les sommets de la conique qui sont situés sur PD ; les plans tangents à la quadrique en A et A′ contiennent les tangentes à la conique en A et A′, et comme ces tangentes sont perpendiculaires à PD, il en résulte que l'intersection des deux plans tangents, c'est-à-dire la droite conjuguée de PD est perpendiculaire à PD ; PD est donc sur le cône Γ.

On peut d'ailleurs établir la réciproque et montrer que toute génératrice du cône Γ, c'est-à-dire toute droite passant par le point P et perpendiculaire à sa conjuguée par rapport à toutes les surfaces homofocales, peut être considérée comme l'une des droites indiquées dans les différentes parties de la question.

Soit une droite PΔ perpendiculaire à sa conjuguée $\Delta_1$. Menons par $\Delta_1$ un plan Q perpendiculaire à PΔ, lequel rencontre cette droite en un point A. Le lieu des pôles du plan Q par rapport à toutes les surfaces homofocales est une perpendiculaire à ce plan ; or puisque $\Delta_1$ est la conjuguée de PΔ, il existe une surface du faisceau pour laquelle P est le pôle du plan Q ; il en résulte que le lieu des pôles du plan Q par rapport à toutes les surfaces homofocales est la droite PA, et que par suite il existe une surface tangente en A au plan Q.

On voit aussi que la droite PΔ jouit des propriétés énoncées aux numéros 1° et 3°.

En outre les plans tangents menés par PΔ à l'une des quadriques ont leurs points de contact sur $\Delta_1$ ; les normales en ces points sont donc dans le plan Q et par suite se rencontrent.

Enfin le plan passant par la droite PΔ et parallèle à $\Delta_1$ coupe l'une quelconque des quadriques suivant une conique ayant PΔ pour axe, puisque les plans tangents menés par $\Delta_1$ à cette surface ont leurs points de contact sur PΔ et rencontrent le plan sécant suivant des droites perpendiculaires à PΔ.

Il en résulte bien que le cône Γ est le lieu géométrique de toutes les droites dont on a parlé.

Enfin parmi toutes les quadriques homofocales, considérons celle qui se réduit à la focale située dans un plan principal $xOy$.

Les normales issues de P à cette focale sont sur le cône Γ ; donc la trace de Γ sur $xOy$ passe par les pieds des normales menées de P à la focale, c'est-à-dire par les pieds des normales à cette focale issues de la projection de P sur le plan $xOy$, et comme la trace de Γ sur R est une hyperbole équilatère dont les asymptotes sont parallèles à $Ox$ et à $Oy$, on en conclut que la trace de Γ sur le plan R est l'hyperbole d'Apollonius relative à la focale située dans le plan $xOy$ et à la projection de P sur ce plan.

J. L., à Douai.

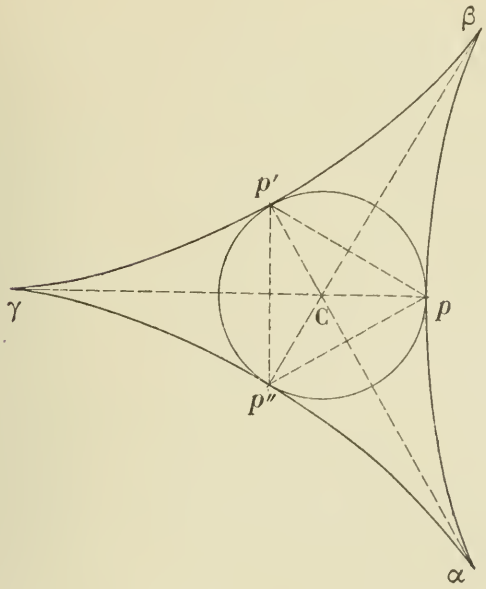
Autres solutions par MM. Gratien, lycée Saint-Louis ; Moriau, lycée Saint-Louis ; R. Lecouvreur ; F. Thévenot.

## REMARQUES SUR LE PROBLÈME DU CONCOURS GÉNÉRAL (1894)

La solution indiquée dans le n° d'Août de la *Revue* ne donne des démonstrations géométriques que pour les deux premières parties de la question. Voici quelques considérations qui permettront de compléter cette solution :

Transformons par polaires réciproques, comme M. Gilbert l'indique dans la 2e partie, la figure où

l'on envisage l'hypocycloïde à trois rebroussements, mais en prenant le cercle C pour cercle directeur.




L'hypocycloïde, que je représenterai par la lettre Σ, devient une cubique admettant le point C comme point double isolé, et les tangentes en ce point sont les droites isotropes. En outre cette cubique admettra trois points d'inflexion à l'infini dans les directions $pp'$, $pp''$, $p'p''$, indiquées par les trois côtés du triangle équilatéral que forment les sommets de l'hypocycloïde. Les tangentes inflexionnelles sont évidemment les polaires par rapport au cercle C des trois points de rebroussement $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. Ces tangentes sont les asymptotes. Cela posé, comme M. Gilbert l'a encore fort bien indiqué, la seconde partie du problème revient à la suivante : « Étant donné un point $d$, on mène les tangentes de ce point à la cubique et l'on considère la conique $C_1$ passant par les quatre points de contact et le centre C du cercle directeur ; démontrer que si cette conique $C_1$ est tangente à une droite L, le point $d$ décrit une conique $C_2$. »

Sans répéter la démonstration de cette partie, rappelons simplement que la conique $C_2$ lieu du point $d$ est appelée, d'après M. Salmon, la conique polaire de la droite L. Rappelons aussi qu'une telle conique peut être envisagée comme l'enveloppe des droites polaires des différents points de la droite L, polaires prises par rapport à la cubique $\sigma$ transformée de l'hypocycloïde Σ, et aussi comme le lieu des pôles de la droite L, par rapport aux coniques polaires de tous les points de L. (Pour la démonstration, voir Salmon, *Traité de géométrie analytique*, courbes du 3° ordre.)

Ces deux définitions de la conique $C_2$ vont nous servir dans la 3e partie du problème.

3° Supposons que cette conique $C_2$ se réduise à deux droites F, F′ qui se coupent en un point $\omega$ :

Cherchons l'enveloppe de la droite L, ainsi que le lieu du point $\omega$ et l'enveloppe des droites F, F′.

Si la conique $C_2$ se réduit aux deux droites F, F′, comme elle est l'enveloppe des droites polaires des points de L, ces droites polaires doivent se confondre avec F, F′ ou passer par le point $\omega$ ; or, d'une manière générale, si dans une courbe algébrique d'ordre $m$ la droite polaire d'un point M passe par un point $\omega$, ce point M décrit la première polaire du point $\omega$ : dans le cas actuel ce théorème montre que la conique polaire du point $\omega$ contient la droite L : donc cette conique polaire se décompose en un système de deux droites dont fait partie la droite L : d'où il suit déjà que le lieu du point $\omega$ est la Hessienne de la cubique $\sigma$.

D'un autre côté, si nous prenons les coniques polaires de l'une des deux droites F ou F′ par rapport à la cubique $\sigma$ (le mot conique polaire d'une droite étant ici pris dans l'acception indiquée plus haut), ces coniques, on le sait, sont tangentes à la droite L ; de plus, elles ont quatre points communs qui sont les quatre pôles de la droite F (ou F′) par rapport à la cubique ; un tel faisceau de coniques ne peut avoir une tangente commune fixe L que si cette droite est tangente à toutes les coniques en un même point : nous concluons de là que les coniques polaires des points de la droite F (ou F′) sont tangentes entre elles en un point de la droite L et tangentes à cette droite : ce raisonnement revient à dire que deux pôles, au moins, de la droite F (ou F′) relativement à la cubique, sont confondus sur L. Or nous savons d'une manière générale que si les premières polaires des points d'une droite par rapport à une courbe d'ordre $m$ sont tangentes en un point $\omega'$, cette droite enveloppe la Steinerienne de la courbe. Dans le cas actuel, les droites F et F′ enveloppent donc la Steinerienne de la cubique $\sigma$,

laquelle Steinerienne est confondue avec la Hessienne. Donc les droites F et F′ sont tangentes à la même cubique et viennent se couper encore sur cette cubique en un point $\omega$.

Recherchons l'enveloppe de L.

Nous avons vu plus haut que la conique polaire du point $\omega$ se décompose en deux droites dont fait partie la droite L. Nous savons que pour une cubique $\sigma$ l'enveloppe des coniques polaires réduites à deux droites est une courbe de 3e classe appelée la Cayleyenne de la cubique. Or toutes les coniques polaires des points du plan passent par le point double C de la cubique $\sigma$ : il est donc évident que ce point fait partie de la Cayleyenne et que cette courbe se réduit à une conique ; en outre les tangentes issues du point C à cette conique sont les tangentes à la cubique $\sigma$ en ce point, puisque ces deux tangentes constituent une conique polaire impropre : or ces deux tangentes sont les droites isotropes, donc le point C est foyer de la conique Cayleyenne : d'ailleurs la Cayleyenne est encore tangente aux trois asymptotes inflexionnelles de $\sigma$, lesquelles asymptotes, d'après ce qui a été dit plus haut, forment un triangle équilatéral de centre C. Il résulte donc en définitive de ce raisonnement, que la conique Cayleyenne, enveloppe de la droite L, est un cercle concentrique au cercle directeur C.

Il est facile de transporter ces résultats à la figure primitive.

Observons que le cercle, enveloppe de la droite L, et concentrique au cercle directeur C, est la conique polaire de la droite de l'infini relativement à la cubique $\sigma$. M. Salmon indique encore comme définition d'une telle conique les trois suivantes : « 1° c'est l'enveloppe des diamètres de la cubique ; 2° c'est le lieu des centres des coniques diamétrales de la cubique ; 3° c'est le lieu des points dont la conique polaire est une parabole. » Pour une cubique générale, cette conique n'est autre chose que l'ellipse maximum inscrite dans le triangle formé par les asymptotes.

A. PAGÈS, à Montpellier.

# CONCOURS DE 1894 (*Suite*)

## ÉCOLE CENTRALE

### (Deuxième session.)

*Géométrie Analytique.*

**368.**— On donne deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, un point M situé dans l'angle $xOy$, dont les coordonnées sont $a$ et $b$, un point P situé sur l'axe des $y$ dont l'ordonnée est $p$. Par le point P on mène, dans le plan des axes, une droite quelconque PR, et, à cette droite PR, on fait correspondre la conique $\Delta$ qui passe par le point M, qui a un foyer en O, et pour laquelle la droite PR est la directrice qui correspond au point O.

1° Déterminer géométriquement dans quelle région du plan doit être située la droite PR pour que la conique $\Delta$ qui lui correspond soit une ellipse, ou pour qu'elle soit une hyperbole.

Discuter le problème en laissant fixe le point M et en déplaçant le point P sur l'axe des $y$.

2° Former l'équation du lieu décrit par le centre de la conique $\Delta$ quand la droite PR tourne autour du point P. Le lieu se compose d'une droite et d'une conique C. — Suivre les transformations de la conique C quand, le point M restant fixe, le point P se déplace sur l'axe des $y$.

Expliquer géométriquement les résultats trouvés par l'analyse.

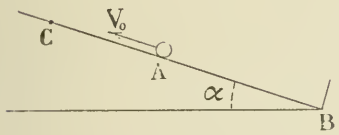
3° Démontrer que la conique C est doublement tangente au cercle décrit sur OP comme diamètre, et reconnaître si cette conique pénètre, ou ne pénètre pas dans ce cercle. Démontrer que si, laissant fixe le point P, on déplace le point M, un des deux axes de la conique C passe toujours par le milieu I de OP, et trouver sur

quelle ligne il faut dans ces conditions placer le point M pour que l'autre axe de la conique C passe aussi par le milieu de OP.

(*3 octobre, de 7 h. à 11 h.*)

## *Physique et Chimie.*

I. **369**. — D'un point A on lance avec une vitesse $V_0$, sur un plan incliné formant avec l'horizon un angle $\alpha$, suivant la ligne de plus grande pente, et de bas en haut, une bille mobile sans frottement, qui, après s'être élevée en un point C redescend et vient frapper un obstacle placé en B à la partie inférieure du plan.




Un observateur placé en A mesure le temps T, écoulé entre l'époque du départ du mobile et l'instant où lui parvient le bruit produit par le choc.

On demande de calculer la distance $x = AB$.

*Exemple numérique* : Vitesse du son $V = 34000^{cm}$ à la seconde, $V_0 = 2452^{cm},5$ à la seconde, $g = 981^{cm}$, $T = 17''$, $\alpha = 30°$.

II. — Action de l'acide azotique à divers degrés de concentration sur les métalloïdes et les métaux.
Ecrire seulement les formules des réactions.

III. **370**. — On chauffe $3^{gr},72$ d'oxalate neutre de potassium sec avec un excès d'acide sulfurique concentré (environ $50^{gr}$).

Le mélange gazeux qui se dégage est dirigé dans un tube en porcelaine rempli de braise et chauffé au rouge vif, puis le gaz à sa sortie est reçu dans un tube eudiométrique sur la cuve à mercure. Quand l'expérience est terminée, on fait passer dans l'eudiomètre un certain volume d'oxygène pur préparé par le bichromate de potassium et l'acide sulfurique concentré. On excite l'étincelle électrique et on agite le gaz restant avec un excès de lessive de potasse. On demande :

1° Quels sont les gaz qui se dégagent avant leur passage dans le tube à braise incandescente et quel est le volume total du mélange qu'ils forment ;

2° Quel est le gaz recueilli dans l'eudiomètre, quel est son volume et ce qu'il devient après le passage de l'étincelle ;

3° Quel est le poids de bichromate de potassium nécessaire pour fournir un volume d'oxygène tel, que le résidu gazeux soit nul après l'absorption par la potasse.

On supposera les gaz secs et dans les conditions normales de température et de pression.
Poids du litre d'air : $1^{gr},293$, $\delta = 0,694$.
Poids atomiques : $H = 1$, $C = 12$, $O = 16$, $K = 39$, $Cr = 52$.
Ecrire toutes les équations et faire les croquis des appareils.

(*3 octobre, de 1 h. 1/2 à 4 h. 1/2*)

## *Calcul trigonométrique.*

Résoudre un triangle connaissant le rayon du cercle circonscrit, un angle et la hauteur abaissée d'un des sommets des autres angles.

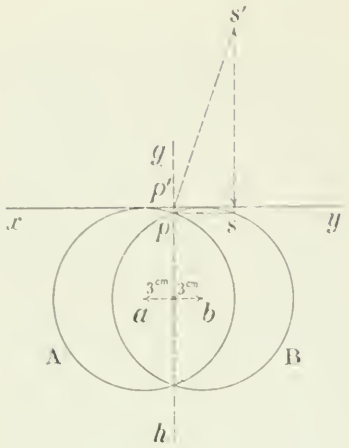
On démontrera que ce problème, pour les données suivantes, admet deux solutions et on calculera celle qui admet le plus grand côté $b$ perpendiculaire à la hauteur donnée $h_b$.

$$R = 32437^{m},24,$$
$$h_b = 21634^{m},75,$$
$$A = 29° 27' 32'',6.$$

(*1 octobre, de 2 h. à 3 h. 1/2.*)

*Géométrie descriptive.*

**371.** — La ligne de terre $xy$ étant tracée au milieu du cadre parallèlement aux petits côtés, on décrit dans le plan horizontal deux cercles égaux A et B de $9^{cm}$ de rayon, tangents à la ligne de terre et ayant leurs centres respectifs $a$ et $b$ à $3^{cm}$ de part et d'autre de la ligne médiane $gh$ du cadre. Soient $(p, p')$ le point d'intersection de ces deux cercles le plus rapproché de la ligne de terre, $(s, s')$ le point dont la cote est $18^{cm}$ et dont la projection horizontale $s$ est à l'intersection du cercle B et de la parallèle à la ligne de terre menée par $p$.




On considère :

1° Un cône dont la base est le cercle A dans le plan horizontal et dont le sommet est le point $(s, s')$ ;

2° Un cylindre dont la base est le cercle B dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à la droite $(ps, p's')$.

Construire la partie de la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces comprise entre les bords du cadre, et la partie de la projection verticale située au-dessus de la ligne de terre jusqu'aux bords du cadre.

On indiquera à l'encre rouge la construction des points et droites remarquables.

On supposera les deux surfaces opaques.

*Titre extérieur* : GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

*Titre intérieur :* INTERSECTION D'UN CÔNE ET D'UN CYLINDRE.

(*1 octobre, de 7 h. à 11 h.*)

# QUESTIONS PROPOSÉES

**372.** — Étant données deux droites OA, OB et un point P, autour de ce point on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent OA et OB en C et D.

1° Trouver l'enveloppe de la droite CD.

2° Cette enveloppe est une conique S. Trouver le lieu des points P pour lesquels la conique S est une hyperbole équilatère.

3° Trouver l'enveloppe de la polaire du point O par rapport à S, quand le point P décrit une droite donnée, Δ.

(H. GRATIEN, lycée Saint-Louis.)

**373.** — Les sommets d'un triangle ABC décrivent une parabole, à laquelle les côtés AC et BC sont normaux en A et B. On demande :

1° Le lieu du milieu de AB ;

2° L'enveloppe de la droite AB ;

3° Le lieu du pied de la hauteur issue du point C.

(E. BERTHELOT, à La Ménitré.)

Les questions 368 à 371 seront naturellement traitées dans la deuxième partie de la *Revue*. Il en sera de même de la question 373.

A partir du prochain numéro, la *Revue* sera faite d'après le plan indiqué dans le numéro de septembre.

*Le Rédacteur-Gérant* : H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 2 Novembre 1894

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### NOTE SUR L'INTERSECTION DE DEUX CONIQUES

Il est facile de discuter, quand on a étudié sommairement les courbes du second degré, le problème qui se pose lorsqu'on cherche les points communs à deux de ces courbes.

Nous emploierons à cet effet les coordonnées homogènes ordinaires, $x$, $y$, $z$, système dans lequel $\frac{x}{z}$, $\frac{y}{z}$ sont les coordonnées cartésiennes d'un point, quand $z$ n'est pas nul, et où $z = 0$ est l'équation de la droite de l'infini.

Désignons alors par

$$S \equiv ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$

$$S' \equiv a'x^2 + 2b'xy + c'y^2 + 2d'xz + 2e'yz + f'z^2 = 0$$

les équations de deux courbes du second degré, et proposons-nous de déterminer les solutions non nulles, communes à ces deux équations.

Pour cela nous distinguerons deux cas :

**1°** Nous supposerons d'abord que les quatre coefficients des carrés de $x$ et de $y$ dans les deux équations ne soient pas simultanément nuls ; choisissons, par exemple, l'hypothèse $c \neq 0$.

Si nous multiplions la première équation par $c'$ et la seconde par $-c$, et que nous ajoutions les produits, nous aurons la nouvelle équation $c'S - cS' = 0$, ou

$$H \equiv (ac')x^2 + 2(bc')xy + 2(dc')xz + 2(ec')yz + (fc')z^2 = 0, \quad (^*)$$

qui, jointe à la première, $S = 0$, forme un système équivalent au système donné, $S = 0$ et $S' = 0$. En effet, toute solution du premier système annule $S$ et $S'$; elle annule donc $S$ et $c'S - cS'$, et, par suite, appartient au second système ; réciproquement, toute solution du second système annule $S$ et $c'S - cS'$, c'est-à-dire $S$ et $-cS'$ ; elle annule donc $S$ et $S'$ puisque $c$ n'est pas nul, et, par suite, vérifie le premier système. Nous sommes donc ramenés à chercher les solutions non nulles, communes aux deux équations $S = 0$, $H = 0$.

La seconde est une conique qui admet pour direction asymptotique l'axe des $y$, $x = 0$ : c'est donc en général une hyperbole, qui admet une asymptote parallèle à $Oy$, asymptote que l'on obtient en annulant le coefficient de $y$ dans l'équation $H = 0$, et dont l'équation est $(bc')x + (ec')z = 0$. Il n'y a alors que les trois cas particuliers qui suivent à examiner.

(a) *La conique* H *est une véritable hyperbole.*

Elle admet alors pour asymptote la droite $(bc')x + (ec')z = 0$, et le binome $(bc')x + (ec')z$ n'est pas en facteur dans l'ensemble des termes qui restent, $(ac')x^2 + 2(dc')xz + (fc')z^2$, puisque la conique H ne se décompose pas. D'ailleurs, pour aucun des points de rencontre, $(bc')x + (ec')z$ n'est nul : car tous ces points sont sur H et H n'a qu'un point commun avec son asymptote, le point à l'infini sur

(*) $(ac')$ est mis à la place de $ac' - ca'$.

$Oy$, $(0, 1, 0)$ ; ce point n'appartient pas à la conique S, qui n'a pas $Oy$ pour direction asymptotique $(c \neq 0)$ ; donc au point de vue qui nous occupe, on peut diviser par $(bc')x + (cc')z$ et écrire

$$y = -\frac{(ac')x^2 + 2(dc')xz + (fc')z^2}{2(bc')x + (cc')z}. \tag{1}$$

On aura donc toutes les solutions communes aux deux équations $S = 0$, $H = 0$, en portant cette valeur de $y$ dans $S = 0$, et résolvant l'équation homogène en $x$ et $z$ ainsi obtenue. On a ainsi l'équation

$$Ax^4 + Bx^3z + Cx^2z^2 + Dxz^3 + Ez^4 = 0, \tag{2}$$

où

$$A = c(ac')^2 - 4b(ac')(bc') + 4a(bc')^2,$$

$$B = 4c(ac')(dc') - 4b(ac')(cc') - 4c(ac')(bc') - 8b(bc')(dc') + 8a(bc')(cc') + 8d(bc')^2,$$

$$C = 4c(dc')^2 + 2c(ac')(fc') - 4c(ac')(cc') - 4b(bc')(fc') - 8c(dc')(bc') - 8b(dc')(cc') + 4a(cc')^2 + 16d(bc')(cc') + 4f(bc')^2,$$

$$D = 4c(dc')(fc') - 4b(fc')(cc') - 4c(fc')(bc') - 8c(dc')(cc') + 8d(cc')^2 + 8f(bc')(cc'),$$

$$E = c(fc')^2 - 4c(fc')(cc') + 4f(cc')^2.$$

Cette équation n'est pas identiquement nulle, sans quoi tout point de H appartiendrait à S ; or ceci n'est pas, puisque ces deux coniques n'ont pas les mêmes points à l'infini. Par conséquent l'équation (2) admet quatre solutions non nulles ; l'équation (1) donne les valeurs correspondantes de $y$ et, dans le cas actuel, les deux coniques données *se coupent en quatre points, réels ou imaginaires conjugués deux à deux, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie, et en quatre points seulement.*

On traiterait de la même manière le cas où la conique H est une vraie parabole, c'est-à-dire où $(bc') = 0$, et l'on obtiendrait le même résultat général. Il est donc inutile de distinguer ce cas du précédent.

(b) *La conique* H *est un système de deux droites.*

La droite $(bc')x + (cc')z = 0$ est alors l'une d'elles, et l'équation $H = 0$ prend la forme

$$(bc')x + (cc')z)(2y + lx + mz) = 0. \tag{3}$$

On résoudra le problème actuel en cherchant successivement les points de rencontre de chacune de ces droites avec la conique $S = 0$. La première, dans le cas actuel où nous supposons $c \neq 0$, ne rencontre la conique S qu'en deux points ; la seconde la rencontre en général aussi en deux points, ou accidentellement en tous ses points ; dans ce dernier cas, les deux coniques S et S′ ont cette droite en commun, car, en posant

$$P \equiv 2y + lx + mz, \qquad Q \equiv (bc')x + (cc')z$$

et en désignant par Q′ une autre fonction linéaire, on a successivement

$$H \equiv c'S - cS' \equiv PQ \qquad \text{et} \qquad S \equiv PQ',$$

d'où

$$cS' \equiv P(c'Q' - Q);$$

on voit donc que S et S′ ont le facteur linéaire commun P.

Donc, dans ce second cas particulier, *les deux coniques* S *et* S′ *se coupent en général en quatre points, réels ou imaginaires conjugués deux à deux, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie ; accidentellement en une infinité de points, et alors elles sont formées par deux couples de droites ayant une droite commune.*

On traiterait de la même manière les cas où la conique H se décompose en la droite de l'infini et une autre droite $(bc') = 0)$, ou bien en deux droites parallèles à OY, distinctes ou confondues

$$((bc') = 0, \quad (cc') = 0).$$

On obtiendrait les mêmes résultats généraux. Il est donc inutile de distinguer plus amplement ces cas particuliers.

(c) *La conique* H *est identiquement nulle.*

On a alors les conditions :

$$(ac') = 0, \qquad (bc') = 0, \qquad (dc') = 0, \qquad (ec') = 0, \qquad (fc') = 0;$$

on conclut de là, en divisant toutes ces égalités par $c$ qui n'est pas nul, et en posant $\frac{c'}{c} = k$, les nouvelles égalités

$$a' = ak, \qquad b' = bk, \qquad c' = ck, \qquad d' = dk, \qquad e' = ek \qquad \text{et} \qquad f' = fk.$$

Ces égalités nous conduisent à $S' \equiv kS$, et nous montrent que la conique $S'$ coïncide avec la conique S ou est identiquement nulle.

Dans ce cas, il est évident qu'il y a une infinité de points communs, *tous les points de* S.

2° Nous supposerons maintenant que les coefficients des termes en $x^2$ et en $y^2$ sont nuls tous les quatre. Alors $a = a' = c = c' = 0$, et l'on a

$$S \equiv 2bxy + 2dxz + 2eyz + fz^2 = 0,$$
$$S' \equiv 2b'xy + 2d'xz + 2e'yz + f'z^2 = 0.$$

Nous écarterons le cas où l'une des coniques se compose de la droite de l'infini et d'une droite à distance finie. Ce cas ne présente aucune difficulté et conduit à l'un des résultats déjà signalés.

Supposons donc $b \neq 0$, $b' \neq 0$ ; il nous suffira d'ailleurs de l'une des hypothèses, $b \neq 0$, par exemple. Alors un raisonnement semblable à celui déjà fait montre que les deux systèmes, $S = 0$ et $S' = 0$, $S = 0$ et $b'S - bS' = 0$, sont équivalents. La dernière conique s'écrit

$$z[2(db')x + 2(eb')y + (fb')z] = 0;$$

elle se décompose en deux droites, la droite de l'infini et une autre droite, en général à distance finie ; chacune de ces deux droites rencontre S en deux points en général. Il y a donc, en général, *quatre points de rencontre dont deux sont toujours à l'infini.*

Enfin il peut arriver que la seconde droite fasse partie de la conique S ; alors les deux coniques ont cette droite en commun et *se coupent en une infinité de points.*

S'il arrivait finalement que la conique $b'S - bS'$ fût identiquement nulle, on aurait $(db') = 0$, $(eb') = 0$, $(fb') = 0$, et l'on en conclurait que la conique $S'$ coïncide avec S ou est identiquement nulle.

Dans ce cas, les coniques S et $S'$ ont une infinité de points communs, *tous les points de* S.

Pour résumer toute cette discussion, on peut donc énoncer le théorème suivant :

**Théorème.** — *Deux coniques à équations réelles ont en général quatre points de rencontre, réels ou imaginaires conjugués deux à deux, distincts ou confondus, à distance finie ou infinie.*

*Si elles ont plus de quatre points de rencontre, elles en ont une infinité, et alors ou bien ce sont deux systèmes de droites ayant une droite commune, ou bien elles coïncident, ou bien l'une d'elles est identiquement nulle.*

E. H.

## BOURSES DE LICENCE ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1894).

**362.** — *Par chaque point* M *d'un plan rapporté à des coordonnées rectangulaires* $Ox$ *et* $Oy$ *passent deux des hyperboles représentées par l'équation*

$$a^2xy + ay + x = 0, \qquad (1)$$

*où* $a$ *est un paramètre variable. Sur quelle courbe* (C) *le point* M *doit-il se trouver pour que les deux hyperboles se coupent en ce point à angle droit ?*

*En combien de points réels, à distance finie et distincts de l'origine, la courbe* (C) *rencontre-t-elle l'hyperbole définie par l'équation* (1) *?*

*Quelle relation doit-il exister entre $a$ et $b$ pour que les deux hyperboles définies par les équations*

$$a^2xy + ay + x = 0, \qquad b^2xy + by + x = 0$$

*se coupent à angle droit en un point autre que l'origine? Cette relation, si l'on y regarde $a$ et $b$ comme les coordonnées d'un point, définit une courbe; on construira cette courbe et l'on cherchera en combien de points réels, à distance finie et distincts de l'origine, elle rencontre la courbe* (C).

1° Il est évident d'abord qu'à deux valeurs distinctes du paramètre correspondent deux hyperboles distinctes, et que chacune de ces hyperboles avec le paramètre unique qui lui correspond sont réels ou imaginaires en même temps.

Cela posé, si, dans l'équation

$$a^2xy + ay + x = 0, \tag{1}$$

$x$ et $y$ désignent les coordonnées d'un point donné dans le plan, l'équation (1) exprime que l'hyperbole qui correspond à la valeur $a$ du paramètre passe en ce point. Cette équation est du second degré en $a$ ; elle donne deux valeurs pour le paramètre ; il y a donc deux hyperboles qui passent au point choisi. Ces courbes sont réelles si l'on a $y^2 - 4x^2y > 0$. Rien ne serait plus facile que d'avoir l'enveloppe des hyperboles du système et aussi les régions du plan qui contiennent les points où se coupent deux hyperboles réelles ; mais ces questions ne sont pas posées.

Rappelons maintenant que pour que deux courbes $f(x, y) = 0$, $\varphi(x, y) = 0$ se coupent orthogonalement en un point $(x, y)$, il faut que l'on ait

$$\left(-\frac{f'_x}{f'_y}\right)\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\right) = -1$$

ou

$$f'_x\varphi'_x + f'_y\varphi'_y = 0.$$

En appliquant cette relation à deux hyperboles correspondant aux valeurs $a$ et $b$ du paramètre, on a

$$(a^2y + 1)(b^2y + 1) + (a^2x + a)(b^2x + b) = 0,$$

ou

$$a^2b^2(x^2 + y^2) + (a^2 + b^2)y + ab(a + b)x + ab + 1 = 0.$$

Dans le cas actuel, $a$ et $b$ sont racines de l'équation (1) et l'on a

$$a + b = -\frac{1}{x}, \qquad ab = \frac{1}{y} \qquad \text{et, par suite,} \qquad a^2 + b^2 = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{y};$$

il n'y a qu'à porter ces expressions dans la relation précédente et simplifier pour avoir immédiatement l'équation de la courbe (C) :

$$x^4 + y^3 = 0, \tag{C}$$

qui est une parabole d'ordre $\frac{4}{3}$.

2° Pour avoir les points de rencontre de l'hyperbole $(a)$ avec cette courbe, tirons $y$ de l'équation (1), $y = -\frac{x}{a^2x + a}$, et portons cette valeur dans l'équation (C); nous aurons, en supprimant le facteur $x^3$, l'équation

$$(a^2x + a)^3x - 1 = 0.$$

C'est l'équation aux abscisses des points de rencontre de l'hyperbole $(a)$ et de la courbe (C), qui n'ont pour abscisses ni 0 ni l'$\infty$. Si nous effectuons le changement d'inconnue, défini par

$$a^2x + a = u,$$

nous obtenons l'équation

$$u^4 - au^3 - a^2 = 0,$$

et le théorème de Descartes montre de suite que cette équation a une racine positive et une racine

négative. Il y a donc deux points de rencontre réels satisfaisant aux conditions exigées. Nous allons d'ailleurs retrouver autrement la solution de cette question.

3° Considérons deux hyperboles du système

$$a^2xy + ay + x = 0 \qquad \text{et} \qquad b^2xy + by + x = 0.$$

Elles ont en commun un point à l'infini sur $Ox$, un point à l'infini sur $Oy$ et un point à l'origine ; il est facile de voir, $a$ et $b$ étant différents, qu'elles ne sont tangentes en aucun de ces points ; donc elles se coupent en un 4e point. On obtiendra le rayon qui joint l'origine à ce point en formant une combinaison homogène des deux équations, ici, en déliminant $xy$ entre ces deux équations. On obtient ainsi

$$a^2(by + x) - b^2(ay + x) = 0,$$

ou, en divisant le premier membre par $a - b$,

$$aby + (a + b)x = 0.$$

Combinant cette équation avec l'une ou l'autre des équations des deux hyperboles, on a de suite

$$x = -\frac{1}{a+b}, \qquad y = \frac{1}{ab}. \tag{2}$$

Or on a vu, dans la première partie, que la condition pour que les deux hyperboles $(a)$ et $(b)$ soient orthogonales en leur point de rencontre $(x, y)$, est

$$(a^2y + 1)(b^2y + 1) + (a^2x + a)(b^2x + b) = 0.$$

Il n'y a plus qu'à porter les valeurs précédentes de $x$ et de $y$ dans cette relation pour avoir la condition demandée :

$$a^3b^3 + (a + b)^4 = 0. \tag{3}$$

Cette relation permet de traiter la deuxième partie. Il y aura en effet autant de points de rencontre de l'hyperbole $(a)$ avec la courbe (C), réels, à distance finie et distincts de l'origine, qu'il y a de valeurs réelles de $b$ tirées de l'équation (3). Or si l'on fait le changement d'inconnue défini par $\frac{ab}{a+b} = u$, on obtient l'équation déjà rencontrée et discutée

$$u^4 - au^3 - a^2 = 0.$$

De là on tirera $u$, de la relation précédente, le nombre $b$, puis les formules (2) donneront les points de rencontre de l'hyperbole $(a)$ avec la courbe (C).

Dans l'équation (3) désignons $a$ par $x$ et $b$ par $y$, nous obtiendrons la courbe

$$x^3y^3 + (x + y)^4 = 0, \tag{4}$$

qu'il s'agit de construire et dont il faut trouver les points de rencontre avec la courbe (C). A cet effet posons $y = -tx$, nous aurons $x = \pm\frac{(1-t)^2}{t^{\frac{3}{2}}}$, et, par suite, $y = \mp\frac{(1-t)^2}{t^{\frac{1}{2}}}$. Si nous ne considérons d'abord que les premiers signes, nous obtiendrons une première portion de la courbe à construire ; si nous considérons ensuite les seconds signes, nous obtiendrons une portion symétrique de la précédente par rapport au point O. Cette symétrie, évidente d'ailleurs sur l'équation (4), permet de restreindre notre étude aux deux fonctions

$$x = \frac{(1-t)^2}{t^{\frac{3}{2}}}, \qquad y = -\frac{(1-t)^2}{t^{\frac{1}{2}}}. \tag{5}$$

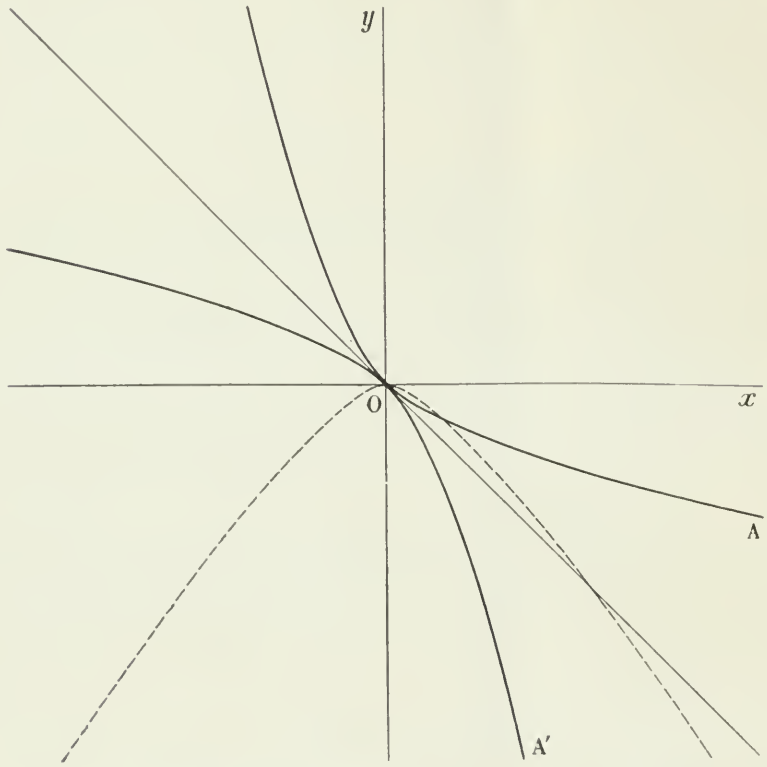
Les valeurs de $x$ et $y$ ne sont réelles que pour les valeurs positives de $t$ ; d'autre part, si on change $t$ en $\frac{1}{t}$, $x$ se change en $-y$ et $y$ en $-x$ ; cette première portion de courbe se décompose en

deux autres symétriques l'une de l'autre par rapport à la seconde bissectrice. Il suffira de construire l'une d'elles et, pour cela, de faire varier $t$ de 0 à 1.

Prenons alors les dérivés de $x$ et de $y$; nous aurons

$$x' = -\frac{(1-t)(3t+1)}{2t^{\frac{3}{2}}}, \qquad y' = \frac{(1-t)(3t+1)}{2t^{\frac{3}{2}}},$$

et ces expressions nous montrent que $x$ est une fonction décroissante dans l'intervalle (0, 1), tandis que $y$ croît dans le même intervalle. En se reportant aux formules (5) on voit que $x$ décroît de $\infty$ à 0 et que $y$ croît de $-\infty$ à 0; d'autre part, la formule $\frac{y'}{x'} = -t$ montre que le coefficient angulaire de la tangente décroît de 0 à $-1$. On peut donc tracer la branche parabolique OA, parallèle à $Ox$ à l'infini, et tangente à la deuxième bissectrice au point O. On trace alors la branche OA′, symétrique de celle-ci, par rapport à la deuxième bissectrice, puis les branches symétriques des deux précédentes par rapport au point O et l'on a ainsi toute la courbe.




Les deux symétries combinées entre elles donnent une 3e symétrie par rapport à la première bissectrice de l'angle des axes. Toutes ces symétries sont évidentes sur l'équation (4). Enfin la relation $y = -tx$, jointe à ce fait que $t$ ne peut prendre que des valeurs positives, montre *a priori* que la courbe doit être tout entière dans le second et le quatrième angle des axes.

Pour terminer, cherchons les points de rencontre de cette courbe avec la courbe (C). Nous aurons les rayons qui joignent l'origine à ces points, en formant une combinaison homogène des deux équations (C) et (4); nous avons ainsi

$$x^8(x+y)^4 + x^3y^9 = 0;$$

d'où, en supprimant le facteur $x^3$ et posant $\frac{y}{x} = \mu$,

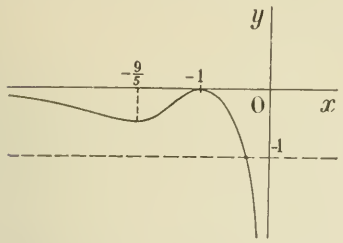
$$\mu^9 + (\mu+1)^4 = 0. \tag{6}$$

Telle est l'équation qui donne les coefficients angulaires de ces rayons; elle ne donne ni l'origine, pour laquelle $\mu$ est indéterminé, ni le point à l'$\infty$ sur $Oy$ pour lequel $\mu$ est infini; elle ne convient donc qu'aux points distincts de l'origine et à distance finie.

Nous discuterons cette équation en étudiant la fonction $y = \frac{(x+1)^4}{x^9}$, où nous avons mis $x$ à la place de $\mu$, pour nous conformer aux habitudes. Comme nous aurons à égaler cette fonction à $-1$, il nous suffira d'y faire varier $x$ de $-\infty$ à 0.

La dérivée de cette fonction est $y' = -\dfrac{(x+1)^2(5x+9)}{x^{10}}$;

cette fonction est positive de $-\dfrac{9}{5}$ à $-1$ et négative de $-\infty$ à $-\dfrac{9}{5}$, puis de $-1$ à 0.




Pour $-\infty$, la fonction $y$ est nulle ; pour $-\dfrac{9}{5}$, elle prend la valeur $-\left(\dfrac{20}{81}\right)^4 \dfrac{5}{9}$, qui est plus petite que 1, en valeur absolue ; enfin pour $-1$, on a la valeur 0, et pour 0 (ou $-\varepsilon$), $y$ devient égale à $-\infty$. La courbe qui représente les variations de la fonction est alors aisée à construire, et l'on voit qu'elle ne coupe la droite $y = -1$ qu'en un point ; ce point correspond à une abscisse comprise entre $-1$ et 0 ; donc l'équation (6) n'a qu'une racine et elle est comprise entre $-1$ et 0.

---

**363.** — *Étant donnés trois nombres inégaux $a$, $b$, $c$, on considère les six points qui, rapportés à un système de coordonnées rectangulaires $Oxyz$, ont respectivement pour coordonnées $a$, $b$, $c$ ; $b$, $c$, $a$ ; $c$, $a$, $b$ ; $b$, $a$, $c$ ; $c$, $b$, $a$ ; $a$, $c$, $b$. Démontrer que ces six points sont sur un cercle ; former les équations du plan de ce cercle et du cône qui a ce même cercle pour directrice et l'origine des coordonnées pour sommet.*

Il est évident que ces six points sont tous dans le plan $x + y + z = a + b + c$ et sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2$. On aura le cône qui les projette de l'origine avec le cercle qui les contient tous, en formant une combinaison homogène des deux équations précédentes. On a ainsi

$$(a+b+c)^2(x^2+y^2+z^2) - (a^2+b^2+c^2)(x+y+z)^2 = 0.$$

Ont résolu les questions 362 et 363, MM. E. Barré, lycée de Douai ; H. Bonnard, lycée de Bordeaux ; H. Marette, lycée Condorcet.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES

**374.** — On sait que tout plan P coupe une cubique gauche en trois points A, B, C :

1° Trouver le lieu du centre de gravité du triangle ABC quand le plan P se meut en restant parallèle à un plan fixe Q ;

2° Ce lieu étant une droite D, prouver que si l'on fait varier la direction du plan Q, il passe une droite D et une seule par tout point de l'espace, et trouver le lieu des points de l'espace par lesquels il passe une infinité de droites D.

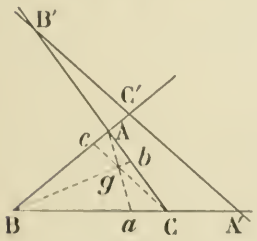
3° Prouver que ce lieu est une cubique (C) dont les droites D sont des sécantes doubles.

4° A toute cubique on en fait ainsi correspondre une autre (C). A la cubique (C) on peut faire correspondre une autre cubique ($C_1$) par le même procédé, et ainsi de suite indéfiniment : Quelle est la limite de toutes ces cubiques ?

5° Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ABC quand le plan P est assujetti à passer par une droite ?

6° Quel est le lieu du centre de gravité du triangle ABC quand le plan P est assujetti à demeurer tangent à un cône de la $n^{\text{ème}}$ classe ?

N. Antomari.




**375.** — Étant donné un triangle ABC et une droite qui rencontre ses côtés aux points A', B', C', on prend les points $a$, $b$, $c$ respectivement conjugués des points A', B', C' par rapport à B et C, C et A, A et B. On sait alors que les droites A$a$, B$b$, C$c$ se coupent en un point $g$ qui est appelé le pôle de la droite A'B'C' par rapport au triangle ABC. Lorsque la droite A'B'C' est à l'infini, le point $g$ devient le centre de gravité du triangle ABC.

En partant de ces considérations, généraliser les résultats du problème précédent.

N. Antomari.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1894, 1re session).

**354.** — *On donne dans un plan deux axes rectangulaires, $x'Ox$, $y'Oy$, un cercle C dont l'équation est $x^2 + y^2 - r^2 = 0$, et une droite D dont l'équation est $x - d = 0$.*

*A un point quelconque F de la circonférence du cercle C on fait correspondre une conique $\Delta$ qui passe par l'origine des coordonnées, qui a un foyer au point F et pour laquelle la directrice qui correspond à ce foyer F est la droite D.*

*Soit I le centre de cette conique $\Delta$, A et A′ les sommets de son axe focal, A étant celui de ces deux sommets qui est le plus près de F, F′ son second foyer.*

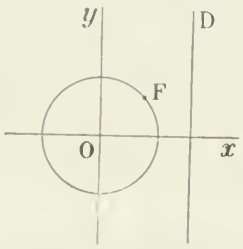
1° *Trouver le lieu du point I quand le point F décrit la circonférence du cercle C. — Ce lieu est une conique ; déterminer, par une construction géométrique, ses sommets et les points où elle rencontre la circonférence du cercle C.*

2° *Déterminer par une construction géométrique le point A et le point A′, sommets de l'axe focal de la conique $\Delta$ qui correspond à un point donné F de la circonférence du cercle C.*

3° *Trouver le lieu du point A et le lieu du point A′ quand le point F décrit la circonférence du cercle C.*

4° *Trouver le lieu décrit par le foyer F′ quand le foyer F décrit la circonférence du cercle C.*

Nota. — *On indiquera comment se modifie chacun des lieux demandés quand, laissant fixes les axes de coordonnées, et invariable le rayon r du cercle C, on fait croître d de 0 à $+\infty$.*




Désignons par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point F et remarquons que ce point étant, par hypothèse, sur le cercle C, $\alpha$ et $\beta$ sont liés par la relation

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0. \qquad (1)$$

Puisque la conique $\Delta$ a pour foyer le point F et pour directrice la droite D, si l'on représente par $\lambda$ l'excentricité de cette conique, son équation est

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = \lambda^2(x-d)^2.$$

D'ailleurs cette conique est assujettie à passer par le point O. Son équation doit donc être satisfaite pour $x = 0$, $y = 0$, et l'on a l'équation de condition

$$\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2 d^2,$$

d'où l'on tire

$$\lambda^2 = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2},$$

c'est-à-dire, en vertu de l'équation (1),

$$\lambda^2 = \frac{R^2}{d^2}.$$

Ainsi l'excentricité de la conique $\Delta$ est $\frac{R}{d}$ et, par conséquent, son équation est la suivante :

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - \frac{R^2}{d^2}(x-d)^2 = 0. \qquad (2)$$

On constate alors facilement : 1° que si la droite D coupe le cercle C, l'excentricité est plus grande que 1 et la conique $\Delta$ est une hyperbole, se réduisant à deux droites qui se coupent en F lorsque ce point coïncide avec l'un des points d'intersection de la droite D avec le cercle C ; 2° que si la droite D est tangente au cercle C, l'excentricité est égale à 1 et la conique $\Delta$ est une parabole, se réduisant à la droite double $y^2 = 0$ quand le point F coïncide avec le point de contact de la droite D et du cercle C ;

3° enfin, que si la droite D ne rencontre pas le cercle C, l'excentricité est plus petite que 1 et la conique $\Delta$ est une ellipse véritable.

**Lieu du point I, centre de la conique $\Delta$.** — Les coordonnées du point I satisfont aux équations

$$\frac{1}{2} f'_x = x - \alpha - \frac{R^2}{d^2}(x - d) = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} f'_y = y - \beta = 0, \qquad (4)$$

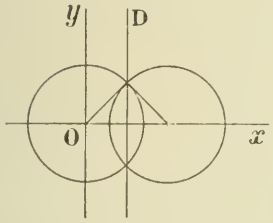
dans lesquelles $\alpha$ et $\beta$ sont des paramètres variables liés par la relation (1). On a donc l'équation du lieu du point I, en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre les équations (1), (3), (4). On trouve ainsi

$$[x(d^2 - R^2) + dR^2]^2 + d^4(y^2 - R^2) = 0, \qquad (5)$$

et l'on voit que ce lieu est une conique $\Gamma$ du genre ellipse.

Pour $R^2 = 2d^2$, cette conique devient le cercle qui a pour équation

$$(x - R\sqrt{2})^2 + y^2 - R^2 = 0$$




et qui, par conséquent, a son centre sur $Ox$, est égal au cercle C et coupe ce cercle orthogonalement aux points où il est rencontré par la droite D.

Observons encore que si $d = R$, la conique $\Gamma$ se réduit à une droite double confondue avec $Ox$. Ce résultat était facile à prévoir, car, si le point F est quelconque sur le cercle C, la conique $\Delta$ est une parabole et il n'y a pas de lieu correspondant; mais si le point F est au point de contact de la droite D avec le cercle, la conique $\Delta$ est la droite double $Ox$ et tous les points de cette droite peuvent être regardés comme centres.

Plaçons-nous maintenant dans le cas général et déterminons les sommets de la conique $\Gamma$ ainsi que les points où elle coupe le cercle C.

*Sommets.* — L'équation (5) ne renfermant pas de terme en $xy$, les axes de l'ellipse $\Gamma$ sont parallèles aux axes de coordonnées. Ils ont donc pour équations respectives

$$\frac{1}{2} f'_x = x(d^2 - R^2) + dR^2 = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_y = d^4 y = 0 \qquad \text{ou} \qquad y = 0.$$

L'ellipse $\Gamma$ a donc deux sommets S et S′ sur $Ox$; les deux autres sommets T et T′ sont sur la droite

$$x = -\frac{dR^2}{d^2 - R^2}.$$

Occupons-nous d'abord des sommets S et S′. Les ordonnées de ces points étant nulles, leurs abscisses s'obtiennent en faisant $y = 0$ dans l'équation (5) et résolvant l'équation obtenue. On trouve ainsi

$$x = \frac{dR}{d + R}, \qquad (S)$$

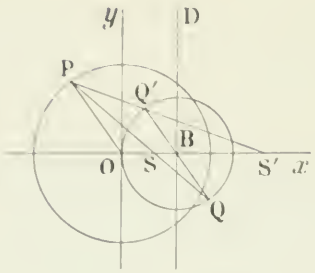
$$x = -\frac{dR}{d - R}. \qquad (S') \qquad (6)$$

Soit B le point où la droite D rencontre $Ox$. Les formules (6) nous montrent immédiatement que les points S et S′ sont les centres de similitude du cercle C et du cercle de centre B et de rayon $d$.

De là, la construction suivante. On trace le cercle B. On mène, dans le cercle C, un rayon quelconque OP et dans le cercle B les deux rayons OQ et OQ′ parallèles à OP, le premier de sens contraire et le second de même sens. Enfin on tire PQ et PQ′. Ces droites rencontrent $Ox$ en S et en S′.

Pour déterminer les sommets T et T', nous remarquerons que la droite

$$x = -\frac{dR^2}{d^2 - R^2}$$

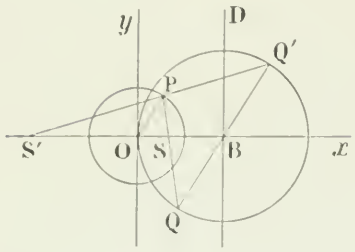



sur laquelle ils se trouvent est nécessairement, et c'est facile à vérifier, la parallèle à $Oy$ menée par le milieu de SS'. Nous mènerons donc cette droite. Il suffira ensuite de prendre les points où elle rencontre les droites $y = \pm R$, car si l'on fait $x = -\frac{dR^2}{d^2 - R^2}$ dans l'équation (5), cette équation devient $y^2 - R^2 = 0$.

*Points d'intersection avec le cercle* C. — L'équation de l'ellipse Γ étant

$$[x(d^2 - R^2) + dR^2]^2 + d^4(y^2 - R^2) = 0$$

et celle du cercle C $\quad x^2 + y^2 - R^2 = 0$,




si nous éliminons $y$ entre ces deux équations, nous obtenons une équation dont les racines sont les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Nous trouvons ainsi l'équation

$$[x(d^2 - R^2) + dR^2]^2 - d^4x^2 = 0,$$

qui se décompose en $\quad x = d \quad$ et $\quad x = \frac{dR^2}{R^2 - 2d^2}$. $\qquad$ (7)

Donc, les points cherchés sont les points où le cercle C est rencontré par les droites, parallèles à $Oy$, représentées par les équations (7). Nous pourrons regarder ces points comme déterminés quand nous aurons construit les points où les droites (7) rencontrent $Ox$.

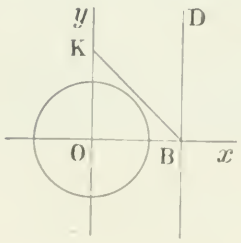
Pour la première de ces droites, il nous suffit de remarquer que c'est la droite D. Considérons l'autre. Son équation s'écrit

$$x = -\frac{dR^2}{2d^2 - R^2}$$

et l'on a

$$-\frac{dR^2}{2d^2 - R^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{dR}{d\sqrt{2} + R} - \frac{dR}{d\sqrt{2} - R}\right].$$

Or, les points d'abscisses $\frac{dR}{d\sqrt{2} + R}$ et $-\frac{dR}{d\sqrt{2} - R}$ sont les centres de similitude du cercle C et du cercle de centre B et de rayon $d\sqrt{2}$. Par conséquent, ayant pris sur $Oy$ le point K d'ordonnée $d$, ce qui donne $d\sqrt{2}$ pour longueur de la portion de droite BK, nous décrirons le cercle de centre B et de rayon BK, nous prendrons les centres de similitude Σ et Σ' des deux cercles (voir plus haut) et par le milieu de la portion de droite ΣΣ' nous mènerons la parallèle à $Oy$.




Observons que pour que les points considérés soient réels, il faut et il suffit que la droite $x = \frac{dR^2}{R^2 - 2d^2}$ rencontre le cercle C, c'est-à-dire que l'on ait

$$R^2 - \frac{d^2R^4}{(R^2 - 2d^2)^2} \geqslant 0.$$

Ceci revient à $\qquad (R^2 - 2d^2)^2 - d^2R^2 \geqslant 0,$

ou encore, $d$ et R étant positifs, à $\qquad \left(d - \frac{R}{2}\right)(d - R) \geqslant 0.$

Ainsi, quand $d$ est inférieur à $\frac{R}{2}$ ou supérieur à R, les points en question sont réels ; ils sont imaginaires dans le cas contraire.

En résumé, la droite D coupant le cercle C, ou ne le coupant pas, selon que $d$ est inférieur ou

supérieur à R, lorsque $d$ est inférieur à $\frac{R}{2}$ la conique $\Gamma$ coupe le cercle C en quatre points situés deux à deux sur les droites (7). Lorsque $d$ est supérieur à $\frac{R}{2}$, les deux courbes n'ont plus que deux points d'intersection. Ces points sont sur D, si $d$ est plus petit que R : ils sont sur l'autre droite, si l'on a $d > R$.

**Détermination des sommets A et A′ de la conique $\Delta$.** — Puisque les points A et A′ sont les sommets de l'axe focal et que cet axe a pour équation $y - \beta = 0$, les ordonnées des points A et A′ sont égales à $\beta$. Quant à leurs abscisses, on les obtient en faisant $y = \beta$ dans l'équation (2) et résolvant l'équation trouvée. Le calcul est immédiat ; on a

$$\frac{d(\alpha + R)}{d + R} \qquad \text{et} \qquad \frac{d(\alpha - R)}{d - R} \tag{8}$$

pour valeurs de ces abscisses.

Soit, d'après l'énoncé, A le sommet le plus près de F. Je dis que, dans tous les cas, l'abscisse du point A est $\frac{d(\alpha + R)}{d + R}$ et celle du point A′, $\frac{d(\alpha - R)}{d - R}$.

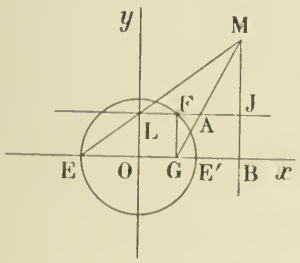
En effet, si $d$ est plus grand que R, la conique $\Delta$ est une ellipse. Comme elle passe par le point O, il faut que le point A soit à droite de $Oy$ et le point A′ à gauche. L'abscisse du point A est donc positive et celle du point A′ négative. Or, la première des valeurs (8) est positive et la seconde négative puisque l'on a $|\alpha| < R < d$. Donc, dans ce cas tout au moins, la première des valeurs (8) est l'abscisse du point A et la seconde celle du point A′.

Supposons maintenant $d < R$. La conique $\Delta$ est une hyperbole. Si le point F est à droite de D, c'est-à-dire si l'on a $\alpha > d$, le point A est à droite de D et le point A′ à gauche, entre $Oy$ et D. Or, on a $\frac{d(\alpha + R)}{d + R} > d$ et $\frac{d(R - \alpha)}{R - d} < d$; donc, etc... Si le point F est à gauche de D, c'est-à-dire si l'on a $|\alpha| < d$, le point A est à gauche de D, entre $Oy$ et D, et le point A′ à droite de D. Or, on a $\frac{(dR + \alpha)}{R + d} < d$ et $\frac{d(R - \alpha)}{R - d} > d$; donc, etc...

La proposition est démontrée.

Déterminons maintenant les positions des points A et A′.

*Point* A. — Par le point F menons la parallèle à $Ox$. Soit L le point où cette droite rencontre $Oy$. Soit, en outre, E l'extrémité de gauche du diamètre du cercle C qui coïncide avec $Ox$ et G le pied de la perpendiculaire abaissée du point F sur ce diamètre. Tirons EL et prenons le point M où cette droite rencontre la droite D. Enfin traçons MG, cette droite rencontre LF en A; car




$$\frac{LA}{LJ} = \frac{EG}{EB} \qquad \text{ou} \qquad \frac{LA}{d} = \frac{R + \alpha}{R + d}.$$

*Point* A′. — On reprend cette construction en ayant soin de remplacer le point E par le point E′, extrémité de droite du diamètre $Ox$ dans le cercle C.

**Lieu du point A.** — Le point A est défini par les deux équations

$$x = \frac{d(\alpha + R)}{d + R} \qquad \text{et} \qquad y = \beta,$$

dans lesquelles les paramètres variables $\alpha$ et $\beta$ satisfont à l'équation

$$\alpha^2 + \beta^2 = R^2.$$

On a donc l'équation du lieu de ce point en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre ces trois équations. On obtient

$$(x(d + R) - dR)^2 + d^2 y^2 - R^2 d^2 = 0.$$

Cette équation montre que le lieu du point A est une ellipse. Si on l'écrit sous la forme

$$x^2(d+R)^2 + d^2y^2 - 2dR(d+R)x = 0,$$

on voit que cette ellipse passe par l'origine où elle est tangente à $Oy$, car l'un des axes est $Ox$. La grandeur de cet axe est $\frac{2dR}{d+R}$. Quant à l'autre axe, il a pour équation $x = \frac{dR}{d+R}$ et les sommets correspondants ont pour ordonnées $+R$ et $-R$.

**Lieu du point A'.** — On raisonnera de même et l'on trouvera pour équation du lieu

$$x(d-R) + dR)^2 + d^2(y^2 - R^2) = 0$$

ou

$$x^2(d-R)^2 + d^2y^2 + 2dR(d-R)x = 0.$$

D'où les conclusions suivantes. Le lieu du point A' est une ellipse qui passe par l'origine. L'un de ses axes coïncide avec $Ox$. Cet axe a pour grandeur $\left|-\frac{2dR}{d-R}\right|$. L'autre axe a pour équation $x = -\frac{dR}{d-R}$ et sa grandeur est $2R$.

*Remarque.* — Puisque les lieux des points A et A' passent tous deux par O et que la demi-somme des abscisses des points A et A' est l'abscisse du point I, le lieu Γ du point I doit avoir pour sommets les centres des lieux des points A et A'. Il est facile de vérifier ce fait.

**Lieu du point F'.** — Soient $x$ et $y$ les coordonnées du point F'. Désignons par $x_1$ l'abscisse du point I. On a évidemment $x_1 = \frac{x+\alpha}{2}$. Or, l'équation (3) donne

$$x_1 - \alpha - \frac{R^2}{d^2}(x_1 - d) = 0,$$

d'où

$$x_1 = \frac{\alpha d^2 - dR^2}{d^2 - R^2}.$$

On a donc

$$\frac{\alpha d^2 - dR^2}{d^2 - R^2} = \frac{x+\alpha}{2},$$

d'où

$$x(d^2 - R^2) + 2dR^2 = \alpha(d^2 + R^2).$$

Ainsi l'abscisse du point F' satisfait à l'équation

$$\frac{x(d^2 - R^2) + 2dR^2}{d^2 + R^2} = \alpha.$$

Son ordonnée satisfaisant évidemment à

$$y = \beta,$$

on a l'équation du lieu du point F' en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre ces deux équations et l'équation de condition

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0.$$

On trouve

$$x(d^2 - R^2) + 2dR^2)^2 + (d^2 + R^2)^2(y^2 - R^2) = 0,$$

et l'on voit que ce lieu est une ellipse dont un axe coïncide avec $Ox$. Les extrémités de cet axe ont pour abscisses $\frac{R(d-R)}{d+R}$ et $-\frac{R(d+R)}{d-R}$.

L'autre axe a pour équation

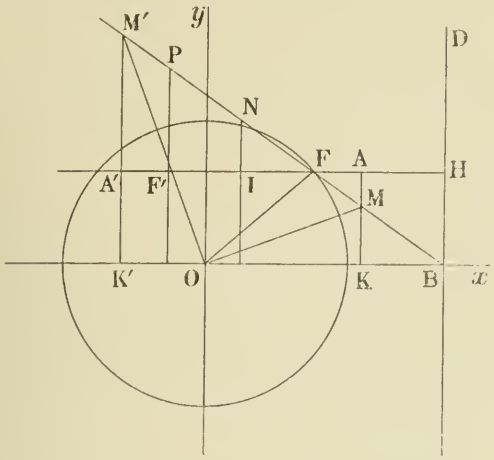
$$x = -\frac{2dR^2}{d^2 - R^2}$$

et sa grandeur est $2R$, ce qui devait être évidemment.

Remarquons que ce lieu doit passer par les points où la droite D rencontre le cercle C, car, lorsque le point F coïncide avec l'un de ces points, la conique Δ se réduit à deux droites qui se coupent en F, et le point F' coïncide avec le point F. Ce fait est facile à vérifier.

**SOLUTION GÉOMÉTRIQUE.** — Je remarque d'abord que la conique Δ, ayant pour foyer F et pour directrice D et, de plus, passant par le point O, son excentricité est $\frac{OF}{OB}$, c'est-à-dire $\frac{R}{d}$. On aura donc les sommets A et A' de la conique Δ en menant l'axe focal FH et partageant FH dans le rapport $\frac{R}{d}$.

Pour cela, il suffira de mener les bissectrices des angles formés par les deux droites OF et OB, de prendre les points M et M′ où ces droites rencontrent FB et enfin, menant par les points M et M′ les parallèles à D, de prendre les points où ces droites rencontrent l'axe focal FH. En effet,




$$\frac{AF}{AH} = \frac{MF}{MB} = \frac{OF}{OB} = \frac{R}{d}$$

et

$$\frac{A'F}{A'H} = \frac{M'F}{M'B} = \frac{OF}{OB} = \frac{R}{d}.$$

Ceci posé, observons que puisque le point F décrit le cercle C et que les points M et M′ partagent BF dans le rapport constant $\frac{R}{d}$, les points M et M′ décrivent chacun un cercle dont le centre est sur OB et dont les points situés sur $Ox$ s'obtiennent sans difficulté.

D'ailleurs $\frac{MA}{MK} = \frac{MF}{MB} = \frac{R}{d}$; par suite $\frac{AK}{MK} = \frac{R+d}{d}$. L'ordonnée du point A est donc à l'ordonnée du point M, dans un rapport constant. Donc, le point A′ décrit une ellipse dont le grand axe coïncide avec le diamètre horizontal du cercle décrit par M et dont le petit axe est évidemment 2R.

Des considérations analogues conduisent au lieu du point A′.

Soit maintenant N le milieu de MM′. On a $BN = \frac{BM + BM'}{2}$, d'où $\frac{BN}{BF} = \frac{1}{2}\left(\frac{BM}{BF} + \frac{BM}{BF}\right)$.

Or, $\frac{BM}{BF}$ et $\frac{BM'}{BF}$ sont des rapports constants.

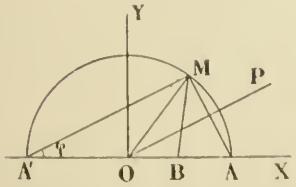
Donc le rapport $\frac{BN}{BF}$ est constant et le lieu du point N est une circonférence. Donc encore, le lieu du point I est une ellipse.

Soit enfin, sur la droite BF, le point P symétrique du point F par rapport au point N. Le rapport $\frac{BP}{BF} = \frac{BM' - M'P}{BF} = \frac{BM'}{BF} - \frac{MF}{BF}$ Or, ces derniers rapports sont constants. Donc le lieu du point P est une circonférence. Donc encore, le lieu du point F′ est une ellipse.

Dans ce qui précède, nous nous sommes placé dans un cas de figure ; il serait nécessaire de vérifier que les relations obtenues sont générales. Il faudrait en outre calculer les constantes considérées et en déduire les résultats précédemment obtenus par le calcul. Cela ne présente aucune difficulté : nous en laissons le soin au lecteur.

## ÉCOLE NAVALE (Concours de 1894).

**358.** — OX *et* OY *étant deux axes rectangulaires, on décrit du point* O *comme centre une circonférence de rayon* $a$, *qui coupe l'axe des* $x$ *en* A *et* A′.




*Soit* B *un point situé sur l'axe des* $x$, $\overline{OB} = b$, *et un point* M *variable sur la circonférence. On considère la parabole circonscrite au triangle* MAB *et dont l'axe est parallèle à* A′M.

*Démontrer géométriquement que l'axe de cette parabole est la droite* OP *menée par* O *parallèlement à* A′M.

*Équation de cette parabole en prenant pour paramètre variable l'angle* $\varphi$ *de* A′M *avec l'axe des* $x$. *Lieu de son second point d'intersection avec le rayon* OM.

*Déterminer sur l'axe* OP *de cette parabole les distances du point* O *au sommet* S *et au foyer* F. *En conclure en coordonnées polaires le lieu du sommet et le lieu du foyer.*

La corde AM de la parabole considérée est une corde principale, puisqu'elle est perpendiculaire à la droite A'M, parallèle aux diamètres de la courbe. La droite OP, parallèle à A'M, étant perpendiculaire au milieu d'une corde principale, est l'axe de la parabole ; cette droite est représentée par l'équation

$$y = x \operatorname{tg} \varphi \qquad \text{ou bien} \qquad x \sin \varphi - y \cos \varphi = 0.$$

L'équation générale des paraboles ayant cette droite pour axe est

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 - \lambda(x \cos \varphi + y \sin \varphi - p) = 0. \qquad [1]$$

Déterminons $\lambda$ et $p$ de telle façon que cette parabole soit circonscrite au triangle AMB ; il suffit pour cela qu'elle passe par les points A et B ; car, ayant pour axe OP, elle ne peut pas passer par le point A sans passer par le point M symétrique de A par rapport à OP. Or, les abscisses des points d'intersection de la courbe et de OX sont les deux racines de l'équation

$$x^2 \sin^2 \varphi - \lambda x \cos \varphi + \lambda p = 0.$$

Pour que ces racines soient $a$ et $b$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\lambda \cos \varphi = (a + b) \sin^2 \varphi \qquad \text{et} \qquad \lambda p = ab \sin^2 \varphi,$$

c'est-à-dire $\qquad p = \dfrac{ab \cos \varphi}{a + b} \qquad$ et $\qquad \lambda = \dfrac{(a + b) \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = (a + b) \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi.$

L'équation demandée est donc

$$(x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 - (a + b) \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi (x \cos \varphi + y \sin \varphi) + ab \sin^2 \varphi = 0. \qquad [2]$$

Soit Q le point où la perpendiculaire abaissée du point B sur l'axe OP rencontre le rayon OM. Ce point étant symétrique de B par rapport à l'axe, appartient à la parabole ; c'est donc le second point où cette courbe est rencontrée par le rayon OM. L'égalité évidente de OQ et de OB montre que quand le point M décrit la circonférence donnée, le point Q décrit la circonférence concentrique ayant OB ou $b$ comme rayon.

On peut arriver aisément par le calcul à ce résultat. Cherchons l'équation de la courbe en coordonnées polaires en prenant O pour pôle et OX pour axe polaire. Remplaçons dans l'équation [2] $x$ par $\rho \cos \omega$ et $y$ par $\rho \sin \omega$ ; elle devient

$$\rho^2 \sin^2 (\varphi - \omega) - (a + b) \rho \sin \varphi \operatorname{tg} \varphi \cos (\varphi - \omega) + ab \sin^2 \varphi = 0.$$

Pour avoir les rayons vecteurs des points d'intersection de la parabole et du rayon OM, il suffit de faire dans cette équation $\omega = 2\varphi$, ce qui donne

$$\rho^2 - (a + b) \rho + ab = 0.$$

Les racines étant évidemment $a$ et $b$, le lieu des points d'intersection de la parabole et du rayon mobile OM se compose des deux cercles ayant O pour centre commun, et $a$ et $b$ pour rayons.

Pour déterminer la distance du point O au sommet de la courbe, nous remarquons que la tangente au sommet de la parabole représentée par l'équation [1] a pour équation

$$x \cos \varphi + y \sin \varphi - p = 0.$$

Le point où elle coupe l'axe OP, c'est-à-dire le sommet, est à une distance de O égale à $p$. Or on a vu que la valeur de $p$ est $\dfrac{ab \cos \varphi}{a + b}$. C'est la distance cherchée. L'équation en coordonnées polaires du lieu des sommets est donc $\qquad \rho = \dfrac{ab}{a + b} \cos \varphi \qquad$ ou $\qquad \dfrac{ab}{a + b} \cos \omega. \qquad [3]$

C'est un cercle passant par le pôle O et ayant pour diamètre une portion de l'axe polaire égale à $\dfrac{ab}{a + b}$. Cette longueur est une quatrième proportionnelle à $a + b$, $a$ et $b$.

Il reste à trouver la distance du point O au foyer de la parabole [2]. Pour cela, rapportons cette parabole à son axe et à la parallèle menée par l'origine à la tangente au sommet. Si l'on fait tourner les axes de l'angle $\varphi$, c'est-à-dire si l'on pose

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \qquad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi,$$

l'équation [2] devient $$y'^2 - (a+b)x' \sin\varphi \operatorname{tg}\varphi + ab \sin^2\varphi = 0,$$

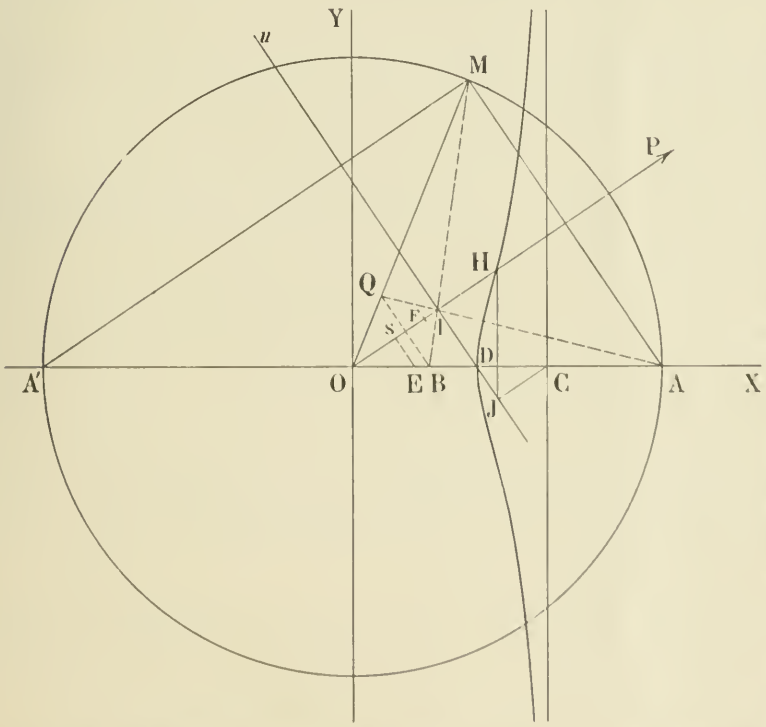
ou bien $$y'^2 = (a+b)\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi\left(x' - \frac{ab\cos\varphi}{a+b}\right).$$

Cette équation montre que la distance du point O au sommet est $\frac{ab\cos\varphi}{a+b}$, comme nous le savions déjà, et en outre que le paramètre de la parabole a pour valeur $\frac{1}{2}(a+b)\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi$. Il en résulte que la distance du point O au foyer est $\frac{ab\cos\varphi}{a+b} + \frac{1}{4}(a+b)\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi$. Le lieu des foyers de toutes les paraboles considérées est donc représenté par l'équation

$$\rho = \frac{ab}{a+b}\cos\omega + \frac{1}{4}(a+b)\sin\omega \operatorname{tg}\omega.$$

On obtient tous ses points en ajoutant aux rayons vecteurs du cercle [3] la quantité variable $\frac{1}{4}(a+b)\sin\omega \operatorname{tg}\omega$, qui croît constamment de zéro à l'infini quand $\omega$ croît de zéro à $\frac{\pi}{2}$. La courbe est d'ailleurs symétrique par rapport à l'axe polaire ; elle a pour asymptote la perpendiculaire à l'axe polaire ayant pour équation $\rho\cos\omega = \frac{a+b}{4}$. On le voit sans peine en cherchant la limite, pour $\omega = \frac{\pi}{2}$, de la sous-tangente $\frac{\rho^2}{\rho'}$. E. D.

**Solution géométrique.** — Il est facile de donner une solution géométrique de cette question.




1° On voit de suite que l'angle A'MA est droit ; donc MA est une corde de la parabole perpendiculaire à la direction de l'axe, et par suite cet axe est le rayon OP, perpendiculaire au milieu de AM.

2° Cela posé, menons par le point B une parallèle, BQ, à AM ; elle est perpendiculaire à OP et rencontre OM en un point Q, symétrique de B par rapport à OP ; donc OQ = OB, et, par suite, le lieu du point Q est le cercle décrit de O comme centre avec OB comme rayon. — Ces deux parties sont traitées ainsi dans la solution précédente.

3° La parabole est alors circonscrite au trapèze ABQM ; la polaire de O passe donc en I (point de concours des diagonales) et est parallèle à AM. Par conséquent le sommet, qui est le point de rencontre de la parabole avec l'axe, est le milieu de OI, S. Or il est facile d'avoir le lieu de I ; car en appelant D le point de rencontre de la polaire de O avec OX, on a successivement

$$\frac{OI}{A'M} = \frac{OB}{A'B},$$

dans les triangles semblables OBI et A'BM, puis $\frac{OI}{A'M} = \frac{OD}{A'A}$,

dans les triangles semblables OID et A'MA ; donc $\frac{OD}{A'A} = \frac{OB}{A'B}$ ou $\frac{OD}{2a} = \frac{b}{a+b}$,

d'où enfin
$$OD = \frac{2ab}{a+b}.$$

Il résulte donc de là, puisque l'angle OID est droit, que le lieu de I est le cercle décrit sur OD comme diamètre. Si l'on appelle alors E le milieu de OD, le lieu de S est le cercle décrit sur OE comme diamètre, et l'on a
$$OE = \frac{ab}{a+b}.$$

4° Si l'on considère tous les couples de droites conjuguées rectangulaires, ils interceptent sur l'axe de la parabole des segments dont le milieu commun est le foyer, F, de la parabole. Nous aurons un de ces couples en considérant la corde AB et son pôle. Or ce point est à l'intersection de la polaire de O, HD, avec le diamètre de la corde AB; ce diamètre est CJ, mené par le milieu de AB parallèlement à OP; J est donc le pôle de AB. Menons par ce point une perpendiculaire à AB ou OX; elle rencontre OP en H, et OH est le segment intercepté sur l'axe de la parabole par les deux droites conjuguées rectangulaires, AB et JH. Donc le foyer F est le milieu de OH.

Le lieu de F est donc homothétique au lieu de H; le centre d'homothétie est O et le rapport 1/2. Il en résulte qu'il suffit de construire le lieu de H pour savoir construire le lieu de F. Or les deux points I et J décrivent respectivement les cercles construits avec les diamètres OD et DC. De là la construction suivante :

Décrire sur OD et DC comme diamètres deux cercles; mener par D une droite quelconque qui rencontre ces deux cercles en I et J; joindre les points O et I, et de J abaisser une perpendiculaire sur OX; le point de rencontre de ces deux droites est un point quelconque du lieu.

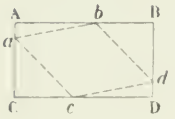
Il résulte de cette construction que le lieu est symétrique par rapport à OX, que le point D fait partie du lieu, que le point mobile du lieu, H, est toujours compris entre les perpendiculaires à OX menées par D et C, et qu'enfin le point H s'éloigne à l'infini quand DJ tend vers DC; la branche qu'il décrit se rapproche indéfiniment de la perpendiculaire à OX menée par le point C; cette droite est donc asymptote à la courbe. Etc.

On peut facilement déduire de là les valeurs de OS et de OF en fonction de $\varphi$. C'est un exercice que nous laissons au lecteur.

E. H.

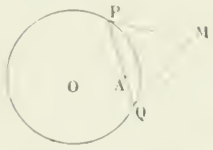
Ont résolu la question : MM. G. A. Pouilliart (à Joigny) et Vazou (à Falaise).

## QUESTIONS PROPOSÉES




**376.** — Dans un rectangle donné on demande d'inscrire un losange de surface donnée : déterminer la plus petite valeur que peut prendre cette surface pour que le problème soit possible.

*(Concours d'admission aux Cours préparatoires à l'école des Ponts et Chaussées, 1894.)*




**377.** — Par un point fixe A pris dans le plan d'un cercle, on mène une corde PQ de direction variable sur laquelle on construit un triangle équilatéral MPQ : on demande le lieu du point M.

Examiner le cas particulier où le point A est situé sur le cercle.

*(Id.)*

**378.** — Trouver l'équation générale des coniques tangentes à une droite D en un point A, à une droite D′, parallèle à D et à une troisième droite $\Delta$ perpendiculaire à D et D′.

Trouver, pour chacune de ces coniques, l'équation de la seconde tangente parallèle à $\Delta$ et l'équation de la corde des contacts avec les droites D et $\Delta$.

On demande alors le lieu du point de rencontre de la tangente parallèle à $\Delta$ avec cette corde des contacts et aussi le lieu du point de contact de cette seconde tangente avec la conique.

On demande en outre le lieu des foyers des coniques du système et de construire ce lieu.

E. H.

M. Laviéville, nommé sous-directeur des études au lycée Saint-Louis, ne pourra plus s'occuper activement de la *Revue*. M. Rivière, professeur au lycée Saint-Louis, a bien voulu se charger de la partie *physique et chimie*.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 3 Décembre 1894

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE (Concours de 1894).

**349.** — *On considère les coniques représentées par l'équation*

$$x^2 + 2\lambda xy - 2\lambda bx - 4(a - b)y = 0,$$

*où $a$ et $b$ sont deux constantes et $\lambda$ un paramètre variable.*

1° *Prouver que, si $\lambda$ varie, les polaires d'un point fixe M par rapport à ces coniques passent par un point fixe P, dont on calculera les coordonnées, au moyen des coordonnées du point M.*

2° *On fait décrire au point M une droite arbitraire $\Delta$*

$$ux + vy + w = 0;$$

*prouver que le point P décrit alors une conique S et que lorsque $\Delta$ se déplace dans le plan, la conique S se déforme en passant par trois points fixes A, A′, A″. Inversement, quand le point P décrit la conique S, le point M décrit la droite $\Delta$; que devient-il quand le point P vient en l'un des trois points A, A′, A″ ?*

3° *Où doit être pris le point M pour que le point P soit rejeté à l'infini ? Quelle position doit avoir la droite $\Delta$ pour que la conique S qui lui correspond soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole ?*

4° *On considère toutes les coniques S qui sont des paraboles et, en particulier, les axes de ces courbes. Prouver que par tout point du plan il passe trois de ces axes ; distinguer les points du plan pour lesquels ces trois axes sont réels de ceux pour lesquels un seul axe est réel.*

5° *Trouver le lieu des points pour lesquels deux de ces axes se coupent à angle droit.*

### PREMIÈRE SOLUTION

**Solution analytique.** — 1° Désignons par $f(x, y, z)$, $(z = 1)$, le premier membre de l'équation du faisceau des coniques données et par $x, y, z = 1$ les coordonnées du point M. L'équation générale des polaires du point M par rapport à ces coniques est

$$Xf'_x + Yf'_y + f'_z = 0,$$

ou

$$D + \lambda D' = 0,$$

en posant $D = xX - 2(a - b)Y - 2(a - b)y$ et $D' = (y - b)X + xY - bx$.

Cette equation montre que les polaires du point M passent toutes par le point de rencontre des droites $D = 0$, $D' = 0$. Nous désignerons les coordonnées de ce point par X, Y, qui représentaient antérieurement les coordonnées courantes pour les droites D et D′, et nous aurons ces nombres en

résolvant les deux équations $D = 0$, $D' = 0$, par rapport à X et Y. Nous obtenons ainsi

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{2(a-b)x(y+b)}{x^2+2(a-b)(y-b)} \\ \text{et}\qquad Y &= \frac{bx^2-2(a-b)y(y-b)}{x^2+2(a-b)(y-b)}; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ce sont les coordonnées du point P.

Avant d'aller plus loin, il est bon de remarquer que les équations $D = 0$ et $D' = 0$ contiennent symétriquement les coordonnées des points M et P, et que, par suite, les coordonnées du point M en fonction de celles du point P ont pour expressions

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{2(a-b)X(Y+b)}{X^2+2(a-b)(Y-b)} \\ \text{et}\qquad y &= \frac{bX^2-2(a-b)Y(Y-b)}{X^2+2(a-b)(Y-b)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

2° Si le point M décrit une droite

$$(\Delta) \qquad ux + vy + w = 0,$$

le point P décrit un lieu dont on a l'équation en remplaçant $x$ et $y$ par les expressions (2) dans l'équation $(\Delta)$. On obtient ainsi la conique

$$S = 2u(a-b)X(Y+b) + v[bX^2 - 2(a-b)Y(Y-b)] + w[X^2+2(a-b)(Y-b)] = 0.$$

Quand la droite $\Delta$ se déplace dans le plan, les rapports de $u$, $v$, $w$ à l'un d'eux deviennent arbitraires et la conique S engendre un réseau de coniques. Cette conique a des points fixes si les trois coniques

$$X(Y+b) = 0, \qquad bX^2 - 2(a-b)Y(Y-b) = 0, \qquad X^2+2(a-b)(Y-b) = 0$$

ont des points communs. Or les deux premières ont en commun les quatre points

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad (O)$$

$$X = 0, \qquad Y = b, \qquad (A)$$

$$X = -2\sqrt{b(a-b)}, \qquad Y = -b, \qquad (A')$$

$$X = 2\sqrt{b(a-b)}, \qquad Y = -b; \qquad (A'')$$

le premier n'appartient pas à la troisième conique ; mais les trois derniers lui appartiennent, et l'on voit que toutes les coniques du réseau passent en ces trois points A, A', A''.

Pour interpréter géométriquement ces résultats, nous supposerons, afin de fixer les idées, $a > 0$, $b > 0$, $a > b$, et nous remarquerons que les coniques données passent par quatre points fixes, les points de rencontre des deux coniques

$$x^2 - 4(a-b)y = 0 \qquad \text{et} \qquad x(y-b) = 0;$$

ces coniques se coupent aux points

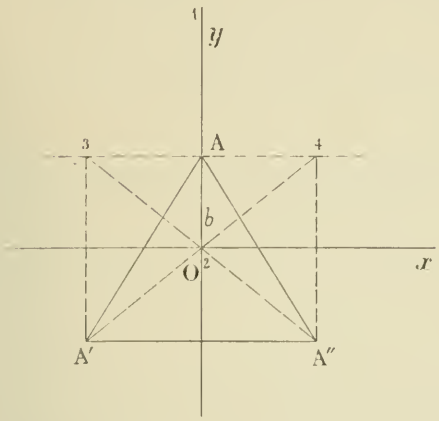
$$x = 0, \qquad y = 1, \qquad z = 0; \qquad 1$$

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 1; \qquad 2$$

$$x = -2\sqrt{b(a-b)}, \qquad y = b, \qquad z = 1; \qquad 3$$

$$x = 2\sqrt{b(a-b)}, \qquad y = b, \qquad z = 1. \qquad 4$$

De ces quatre points l'un est à l'infini sur $Oy$, un autre à l'origine et les deux derniers sur la droite $y = b$, symétriquement placés par rapport à $Oy$. Ces points ont été marqués en 1, 2, 3, 4 sur la figure ; ils forment un quadrangle dont les points A, A′, A″ sont les points diagonaux, ainsi qu'il est aisé de le vérifier.




Alors les coniques du réseau S constituent l'ensemble des coniques circonscrites au triangle AA′A″, et les trois coniques de base de ce réseau sont : la première, $XY + b) = 0$, le système formé par l'axe $Oy$ et la droite A′A″ ; la seconde, $bX^2 - 2(a - b)Y(Y - b) = 0$, l'hyperbole passant aux quatre points O, A, A′, A″, et ayant $Oy$ pour axe de symétrie ; la troisième, $X^2 + 2(a - b)(Y - b) = 0$, la parabole circonscrite au triangle AA′A″ et ayant pour axe, $Oy$.

Cela posé, quand le point P décrit la conique $S = 0$, où $u$, $v$, $w$ ont des valeurs données, les coordonnées X et Y qui figurent dans les formules (2) vérifient l'équation $S = 0$ ; il suffit de remplacer dans celle-ci les fractions qui sont les seconds membres de ces formules (2) par $x$ et $y$ pour avoir le lieu du point M : on retrouve ainsi la droite Δ.

Quand le point P vient en l'un des points A, A′ ou A″, les premiers membres des coniques de base du réseau sont tous nuls. Or ce sont justement les trois déterminants du second ordre formés avec les coefficients des équations $D = 0$, $D' = 0$, quand on y regarde $x$ et $y$ comme étant les inconnues ; ces équations se réduisent à une seule, et pour chacune de ces positions du point P le point M est indéterminé sur une droite : si le point P est en A, le point M est indéterminé sur la droite $y = -b$ ; si le point P est en A′, le point M est indéterminé sur la droite $\sqrt{(a-b)}(y - b) + \sqrt{b}x = 0$ ; si le point P est en A″, le point M est indéterminé sur la droite $-\sqrt{(a-b)}(y - b) + \sqrt{b}x = 0$.

En un mot quand le point P est en l'un des sommets du triangle AA′A″, le point M est indéterminé sur le côté opposé.

Si le point P se rapproche de l'un de ces sommets en restant sur une conique S déterminée, le point M se meut sur la droite Δ et alors il vient au point de rencontre de Δ avec le côté opposé au sommet considéré dans le triangle AA′A″.

3° Pour que le point P soit à l'infini, il faut que le dénominateur commun des formules (1) soit nul ; c'est-à-dire que le point M soit situé sur la parabole

$$x^2 + 2(a - b)(y - b) = 0.$$

C'est la troisième conique de base du réseau. Ainsi que nous l'avons vu, c'est la parabole circonscrite au triangle AA′A″ et ayant $Oy$ pour axe.

Pour exprimer que la conique S est une ellipse, formons les termes du second degré de cette conique et leur discriminant. Nous aurons d'abord, en développant l'équation $S = 0$,

$$(bv + w)X^2 + 2(a - b)uXY - 2(a - b)vY^2 + \cdots = 0,$$

puis la condition

$$(a - b)^2u^2 + 2(a - b)v(bv + w) < 0,$$

pour exprimer que cette conique est une ellipse. Divisons par $(a - b)$, qui est positif, nous aurons

$$(a - b)u^2 + 2v(bv + w) < 0,$$

suivant que la conique S est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

Il est facile de voir que

$$(a - b)u^2 + 2v(bv + w) = 0$$

est l'équation tangentielle de la parabole qui est la troisième conique de base dans le réseau, et que, si le premier membre de cette équation tangentielle est négatif, pour $u$, $v$, $w$, la droite dont ce sont les coordonnées ne rencontre pas cette parabole. Soit $\Pi$ cette parabole. Les droites $\Delta$ pour lesquelles la conique $S$ est une parabole enveloppent la parabole $\Pi$; les droites $\Delta$ pour lesquelles la conique $S$ est une hyperbole sont les sécantes de la parabole $\Pi$; enfin les droites $\Delta$ pour lesquelles la conique $S$ est une ellipse sont les non-sécantes de cette même parabole $\Pi$.

4° Considérons maintenant en particulier les coniques du réseau (5) qui sont des paraboles, c'est-à-dire qui correspondent aux droites $\Delta$ dont les coordonnées vérifient l'équation

$$(a-b)u^2+2v(bv+w)=0.$$

Nous obtiendrons leur équation générale en tirant $w$ de cette relation,

$$w=-bv-\frac{(a-b)u^2}{2v},$$

et portant cette valeur dans l'équation générale $S=0$. Effectuons ce calcul et désignons $\frac{u}{v}$ par $t$; nous aurons, toutes réductions faites, l'équation générale des paraboles circonscrites au triangle $AA'A''$:

$$(2y-tx)^2-4btx+2(a-b)t^2y-4b^2-2b(a-b)t^2=0. \qquad (3)$$

La direction de l'axe de la parabole $(t)$ a pour coefficient angulaire $\frac{t}{2}$; les cordes principales ont pour coefficient angulaire $\frac{-2}{t}$, et, par suite, l'équation de l'axe est

$$f'_x-\frac{2}{t}f'_y=0,$$

en désignant, pour abréger, par $f(x, y)$ le premier membre de l'équation (3). On obtient ainsi, toutes réductions faites,

$$(t^3+4t)x-2(t^2+4)y-2at^2=0 \qquad (4)$$

pour équation de l'axe de la parabole $(t)$. Si dans cette équation on regarde $x$ et $y$ comme les coordonnées d'un point donné, elle exprime que l'axe de la parabole $(t)$ passe en ce point et détermine, par suite, les valeurs de $t$ pour lesquelles cela a lieu. L'équation (4) étant du troisième degré en $t$, il y a donc trois axes qui passent par chaque point du plan; leur enveloppe est de troisième classe.

Nous aurons partagé le plan en régions contenant, les unes des points pour lesquels les trois axes sont réels, et les autres des points pour lesquels deux sont imaginaires, en construisant le lieu des points pour lesquels deux d'entre eux sont confondus, car tout ce que nous avons à dire sur la réalité et la coïncidence des droites d'un faisceau tel que (4), se ramène aux mêmes études sur le paramètre $t$.

Le lieu que nous obtiendrons ainsi se compose de l'enveloppe du faisceau et parfois aussi de certaines droites doubles ou multiples de ce faisceau; ici il n'y aura que l'enveloppe, comme nous allons le voir.

Adjoignons donc à l'équation (4) sa dérivée par rapport à $t$; nous aurons, pour définir le lieu, les deux équations

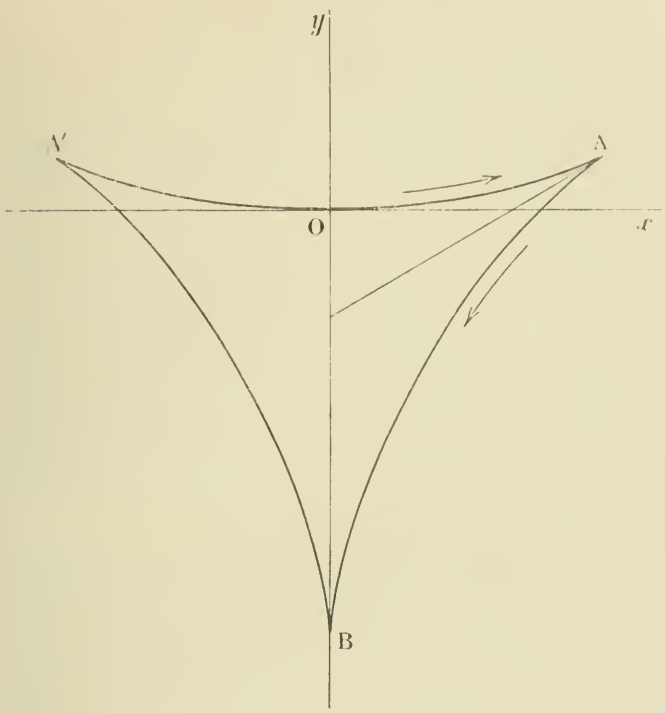
$$(t^3+4t)x-2(t^2+4)y-2at^2=0,$$
$$(3t^2+4)x-4ty-4at=0.$$

Si l'on éliminait $t$ entre ces deux équations, on aurait l'équation du lieu cherché en coordonnées cartésiennes. Mais il vaut mieux résoudre ces deux équations par rapport à $x$ et à $y$, et trouver les deux équations de la courbe, à l'aide du paramètre $t$. Nous aurons ainsi

$$\left.\begin{aligned} x&=\frac{16at}{(t^2+4)^2},\\ y&=\frac{a(4t^2-t^4)}{(t^2+4)^2},\end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

équations qui montrent immédiatement que le lieu est une quartique unicursale, c'est-à-dire une quartique à trois points doubles ou à singularités équivalentes.

Pour construire cette courbe, remarquons d'abord que si l'on change $t$ en $-t$, $x$ se change en $-x$, et $y$ ne change pas; la courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des $y$, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de construire la portion qui correspond aux valeurs positives de $t$. Cela posé, les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $t$ sont




$$x' = \frac{16a(4-3t^2)}{(t^2+4)^3},$$

$$y' = \frac{8at(4-3t^2)}{(t^2+4)^3},$$

et nous montrent que $x$ et $y$ croissent toutes deux dans l'intervalle $\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ et décroissent quand $t$ varie de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ à $+\infty$; d'autre part, le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{y'}{x'} = \frac{t}{2}$ et croît toujours avec $t$ (de 0 à $+\infty$). Il en résulte que la tangente tourne toujours dans le sens positif quand $t$ croît de 0 à $+\infty$.

D'ailleurs pour $t = 0$, $x$ et $y$ sont nuls; pour $t = \frac{2}{\sqrt{3}}$, $x = \frac{a\sqrt{3}}{8}$, $y = \frac{a}{8}$; pour $t$ infini, $x = 0$, $y = -a$. Toutes ces remarques permettent de tracer les deux arcs OA et AB qui sont décrits dans le sens des flèches, quand $t$ varie successivement de 0 à $\frac{2}{\sqrt{3}}$ et de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ à $+\infty$. La courbe s'achève par symétrie et l'on obtient ainsi une courbe à trois points de rebroussement, A, B, A'. Il serait facile de vérifier que c'est une hypocycloïde à trois rebroussements, mais cela n'a aucun intérêt au point de vue des questions qui restent à traiter.

La courbe trouvée partage le plan en deux régions; voyons ce qui se passe dans chacune d'elles. Si l'on prend un point particulier de la région intérieure, le point $x = 0$, $y = -\frac{a}{2}$, par exemple, l'équation (4) devient, pour ce point, $4 - t^2 = 0$; elle admet trois racines réelles : $-2$, $+2$ et une racine infinie; donc par tout point de cette région il passe trois axes réels. Si l'on prend un point particulier de la région extérieure, $x = 0$, $y = a$, par exemple, l'équation (4) devient, pour ce point, $t^2 + 2 = 0$; elle admet deux racines imaginaires; donc par tout point de cette région il ne passe qu'un seul axe réel. Enfin par tout point de la courbe, il passe deux axes réels, dont l'un compte pour deux.

5° Soient $t$ et $t'$ les paramètres de deux des axes qui passent au point $(x, y)$; ce sont deux racines de l'équation (4); d'ailleurs les coefficients angulaires des axes correspondants sont $\frac{t}{2}$ et $\frac{t'}{2}$; la condition pour qu'ils soient rectangulaires est donc $tt' = -4$; d'autre part, l'équation (4) donne

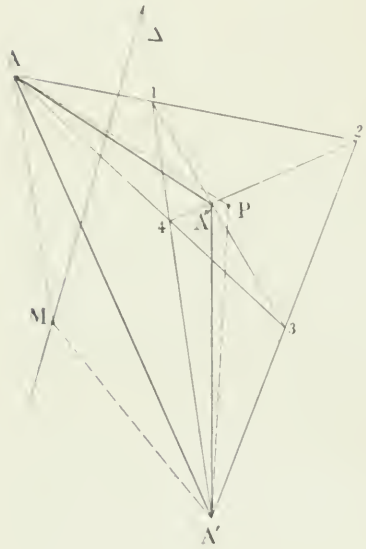
pour le produit des trois racines, $tt'' = \frac{8y}{x}$ ; on en conclut que $t = -\frac{2y}{x}$ doit être racine de cette équation, et c'est en exprimant ce fait que l'on obtient l'équation du lieu :

$$2(x^2 + y^2) + ay = 0.$$

Ce lieu est un cercle facile à construire.

Ont traité la question, à peu près complètement : MM. Hugon, Louis Graux (à Nantes), Jean Tanasesco (à Bucarest), G.-A. Pouilliard (à Joigny), F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette, Pétrescu (à Bucarest) et F. Corbière.

**Solution géométrique.** — Il est aussi simple de considérer les coniques circonscrites à un quadrangle quelconque, 1, 2, 3, 4, que d'envisager celles de l'énoncé. Nous traiterons donc le problème plus général obtenu en partant de coniques passant par quatre points quelconques.




**1°** La première partie résulte du théorème de Desargues. Soit en effet M un point quelconque ; prenons les polaires de ce point par rapport aux couples de côtés qui se coupent en A et en A' ; nous obtiendrons les deux polaires AP et A'P qui se coupent en un point P. Si alors nous menons la droite MP, toutes les coniques du faisceau tracent sur cette droite une involution dont M et P sont les points doubles, puisque ces deux points divisent harmoniquement deux des couples ; donc toutes les polaires de M passent en P et toutes celles de P passent en M. En plus de ce qui était indiqué, nous voyons que les deux points M et P jouent l'un par rapport à l'autre le même rôle.

**2°** Quand le point M se meut, les deux faisceaux AM et AP forment un faisceau involutif et, par suite, sont homographiques ; de même, les faisceaux A'M et A'P. Mais quand M décrit une droite, les deux faisceaux AM et A'M sont évidemment homographiques ; il en est donc de même de AP et A'P, et le point P décrit une conique qui passe aux points A et A'. Rien ne distingue A'' des deux autres points, et cette conique passe aussi au point A''.

Inversement, si le point P décrit une conique qui passe aux trois points A, A' A'', les deux faisceaux AP et A'P sont homographiques ; il en est donc de même de AM et A'M ; d'ailleurs AA'' et A'A'' sont un couple de rayons correspondants et ceux-ci ont pour correspondants respectifs AA' et A'A ; les deux faisceaux AM et A'M, qui sont homographiques, ont deux rayons homologues confondus ; donc le point M décrit une droite.

On voit donc qu'à toute droite Δ du plan est associée une conique S qui passe aux points A, A', A''.

Lorsque le point P vient en A'', les deux rayons AM et A'M viennent sur AA' et le point M est indéterminé sur cette droite.

**3°** Puisque P est par rapport à M ce que M est par rapport à P, le point M décrit une conique circonscrite au triangle AA'A'', quand le point P décrit la droite de l'infini. La nature de cette conique dépend de la forme du quadrangle. En effet, la conique S qui correspond à la droite Δ, passe par les deux points doubles de l'involution que le faisceau détermine sur cette droite ; donc la conique actuelle coupe la droite de l'infini aux deux points doubles de l'involution tracée sur cette droite, c'est-à-dire aux points à l'infini des deux paraboles du système. C'est donc une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que les deux paraboles du faisceau sont distinctes et réelles, imaginaires ou confondues.

Soit C cette conique ; les deux points de rencontre de l'une quelconque des droites Δ avec cette conique correspondent aux points P' et P'' qui sont à l'infini sur la conique S associée à Δ. Si donc Δ est sécante de C, la conique S est une hyperbole ; si Δ est non-sécante pour C, S est une ellipse ; si Δ est tangente à C, S est une parabole.

**4°** Considérons les paraboles circonscrites au triangle AA'A'' ; il y a une seule de ces courbes qui soit tangente à la droite de l'infini en un point quelconque, H ; donc pour tout point H de la droite de l'infini passe un seul axe autre que la droite de l'infini elle-même. Si maintenant le point H tend vers l'un des points circulaires, I ou J, le point K, conjugué harmonique de H par rapport à I et J, tend aussi vers le même point ; d'autre part, K est le point à l'infini des cordes principales de la parabole qui passe en H, et l'axe est la polaire de ce point K par rapport à la parabole ; donc quand le point H vient en I, par exemple, le point K y vient

aussi et sa polaire est la droite de l'infini elle-même. Il en résulte que l'axe de la parabole qui décrit le faisceau vient deux fois coïncider avec la droite de l'infini. Donc l'enveloppe de cet axe est une courbe de 3e classe, doublement tangente à la droite de l'infini aux points I et J ; c'est donc une hypocycloïde à trois rebroussements.

Alors il résulte de l'étude de cette courbe que de tout point de la région intérieure on peut mener trois axes réels, et de tout point de la région extérieure, un seul.

5° C'est encore une propriété connue de cette courbe que le lieu des points de rencontre de deux tangentes rectangulaires est le cercle tritangent à cette courbe, ce qui donne la solution de la cinquième partie.

Remarque. — On peut démontrer autrement, d'une façon intéressante, que l'enveloppe des axes des paraboles circonscrites à un triangle est une courbe de 3e classe. Considérons un point P quelconque dans ce plan et un second point quelconque aussi, Q ; menons, pour chaque parabole, le diamètre qui passe au point P et la parallèle à sa direction conjuguée par le point Q ; ces deux droites se coupent en un point $\mu$ dont *le lieu est une cubique qui passe deux fois au point* P. En effet, toute droite qui passe en P, PX, est diamètre d'une seule parabole circonscrite au triangle AA'A'' ; il n'y a donc sur PX qu'un point du lieu autre que P. Le point P sera sur le lieu, quand la droite QP sera parallèle aux cordes conjuguées du diamètre qui passe en P, c'est-à-dire pour les paraboles du faisceau dont P est le milieu de la corde QP ; il y a deux paraboles répondant à la question ; donc le point P fait deux fois partie du lieu ; c'est un point double.

Maintenant la droite PX sera un axe, si elle est perpendiculaire à sa direction conjuguée, c'est-à-dire si l'angle $\mu$ est droit. Mais le lieu de ce nouveau point $\mu$ est le cercle décrit sur PQ comme diamètre et ce cercle coupe la cubique en six points, dont trois sont à rejeter : deux en P et un en Q. Il y a donc trois axes qui passent au point P.

E. H.

M. J. Thévenot a envoyé une solution pour les trois premières parties, semblable à la précédente.
M. L. R. a envoyé pour les deux dernières parties une solution très originale, que le manque de place seul empêche de publier.

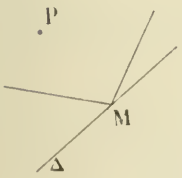
## DEUXIÈME SOLUTION, par M. A. Pagès, à Montpellier.

D'une manière générale, considérons le faisceau des coniques

$$C + \lambda C_1 = 0. \qquad (1)$$

On sait qu'étant donné un point $M(x_0, y_0, z_0)$, on peut lui faire correspondre un point $P(x_1, y_1, z_1)$, tel que les polaires du point M par rapport aux coniques du faisceau viennent se couper au point P. On sait aussi que la correspondance est réciproque et par conséquent rationnelle.

Assujettissons le point M à décrire une droite $\Delta$, $ux + vy + w = 0$. Pour chaque position des points P et M, les polaires du point P par rapport aux coniques $C + \lambda C_1 = 0$, viennent se couper sur la droite $\Delta$ ; envisageons alors pour un instant la droite $\Delta$ comme formée de deux droites confondues, et considérons le réseau de coniques




$$C + \lambda C_1 + \mu(ux + vy + w)^2 = 0 ; \qquad (2)$$

ce que nous venons de dire plus haut, signifie que les polaires du point P par rapport à ce réseau concourent sur la droite $\Delta$ ; donc le point P appartient au Jacobien du réseau ; or comme le réseau contient une droite double $\Delta$, ce Jacobien se décompose en cette droite et une conique S circonscrite au triangle autopolaire commun à C et $C_1$.

Quand la droite $\Delta$ se déplace, la conique S reste toujours circonscrite au triangle autopolaire AA'A'' des coniques C et $C_1$. Comme il y a réciprocité entre les points P et M, quand P décrit la conique S, le point M est sur la droite $\Delta$.

Cette transformation fait donc correspondre à une droite $\Delta$ du plan une conique S circonscrite au triangle autopolaire de C et $C_1$, et inversement.

Examinons ce que devient le point M quand le point P est en l'un des points A, A', A''.

On sait que la transformation rationnelle que nous considérons se traduit d'une manière générale par les formules

$$\frac{x_0}{y_1 z_1} = \frac{y_0}{z_1 x_1} = \frac{z_0}{x_1 y_1},$$

en prenant le triangle AA'A'' pour triangle de référence, et on voit ainsi qu'à un sommet du triangle de référence ($x_0 = y_0 = 0$, par exemple) répondent tous les points du côté opposé ($z_1 = 0$) et réciproquement. Si nous imaginons que les points M $(x_0, y_0, z_0)$ appartiennent à un même plan, et que les points P correspondants $(x_1, y_1, z_1)$ forment un autre plan, le triangle commun AA'A'' auquel on rapporte les points des deux plans porte le nom de triangle fondamental de la transformation, ou triangle fondamental des deux plans.

3° Si le point P décrit la droite à l'infini de son plan, le point M décrit une conique Γ circonscrite au triangle AA'A'' dans le premier plan : c'est cette conique qui est telle que si la droite Δ la coupe, le lieu S du point P est une hyperbole, si la droite Δ lui est tangente, S est une parabole, et enfin si la droite Δ lui est extérieure, S est une ellipse.

Examinons dans quels cas Γ est elle-même une hyperbole : on sait, d'après ce que nous avons dit plus haut, que la conique Γ associée à la droite de l'infini forme le Jacobien du réseau défini par les coniques primitives C, $C_1$ et la droite de l'infini comptée deux fois : ce réseau est

$$C + \lambda C_1 + \mu z^2 = 0,$$

et son Jacobien sera

$$\frac{\partial C}{\partial x}\frac{\partial C_1}{\partial y} - \frac{\partial C}{\partial y}\frac{\partial C_1}{\partial x} = 0.$$

Si les coniques C et $C_1$ sont représentées par les équations

$$C = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + \cdots$$
$$C_1 = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2 + \cdots$$

les directions asymptotiques de Γ seront définies par l'équation

$$(AB_1 - BA_1)x^2 + (AC_1 - CA_1)xy + (BC_1 - CB_1)y^2 = 0,$$

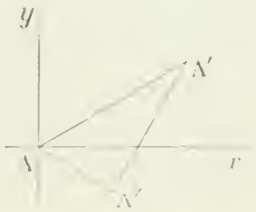
et elles seront réelles si l'on a $(AC_1 - CA_1)^2 - 4(BC_1 - CB_1)(AB_1 - BA_1) > 0.$

Cette inégalité exprime que l'involution définie par les deux couples de directions asymptotiques des coniques C et $C_1$ admet deux rayons doubles réels et distincts ; en d'autres termes, ces deux couples n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Si les rayons doubles de l'involution que nous venons d'envisager sont confondus, c'est-à-dire si les coniques C et $C_1$ ont une direction asymptotique commune, le Jacobien Γ est une parabole ; c'est d'ailleurs le cas de l'énoncé. Dans l'autre cas, Γ est une ellipse.

4° Considérons les paraboles S circonscrites au triangle AA'A'', polaire des coniques C et $C_1$, et cherchons l'enveloppe des axes de ces courbes.

Prenons pour axes de coordonnées les bissectrices $Ax$, $Ay$ qui passent au sommet A du triangle et définissons les points A', A'' par leurs abscisses $a$ et $b$ et les coefficients angulaires $+m$, $-m$ des droites AA', AA''.




Si $ux + vy + w = 0$ représente un axe des paraboles considérées, l'équation de ces courbes pourra s'écrire

$$(ux + vy + w)^2 - 2p(vx - uy + \lambda) = 0\,;$$

on a les relations

$$w^2 = 2p\lambda,$$
$$(au + mav + w)^2 - 2p(av - amu) - w^2 = 0,$$
$$(bu - mbv + w)^2 - 2p(vb + bmu) - w^2 = 0\,;$$

l'élimination de $2p$ entre ces dernières relations donne l'équation tangentielle de l'enveloppe de l'axe, qui, toutes réductions faites, s'écrit

$$a(u + mv)^2(v + mu) - b(u - mv)^2(v - mu) + 4mw(u^2 + v^2) = 0.$$

C'est une courbe de troisième classe bitangente à la droite de l'infini aux points cycliques ; c'est donc une hypocycloïde à trois rebroussements (on sait qu'en général l'équation d'une hypocycloïde à trois rebroussements est $\varphi(u, v) + w(u^2 + v^2) = 0$, où $\varphi(u, v)$ est un polynome homogène du 3e degré). L'enveloppe des axes obtenue, il est facile de conclure le nombre de ces droites réelles qui passent par un point donné du plan. En outre, la cinquième partie du problème est immédiate, puisqu'on sait que le lieu des sommets des angles droits circonscrits à une hypocycloïde est le cercle tritangent à la courbe.

Il résulte donc de ce que nous venons de dire que, quel que soit le triangle AA'A'', l'enveloppe des axes des paraboles circonscrites est une hypocycloïde, et ce fait n'est pas particulier au problème actuel où le triangle AA'A'' est isocèle.

## AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES (Concours de 1894).

**361.** — *On considère toutes les hyperboles équilatères* H *qui déterminent sur l'axe* $Oy$ *des segments variables ayant leur milieu au point* O, *et qui divisent harmoniquement un segment fixe* AB *porté par l'axe* $Ox$ *perpendiculaire à l'axe* $Oy$. *On désignera par* $a$, $b$ *les abscisses des points* A *et* B.

1° *Prouver qu'il y a dans le plan* $xOy$ *une infinité de segments* MM' *divisés harmoniquement par toutes*

*les hyperboles* H ; *les extrémités* M, M′ *de ces segments sont chacune le centre d'une hyperbole* H *réduite à deux droites.*

2° *Les extrémités* M, M′ *d'un même segment sont les foyers d'une conique tangente en* O *à l'axe* $Ox$ *et tangente en des points variables aux parallèles à l'axe* $Oy$ *issues des points* A *et* B.

3° *Trouver le lieu des milieux des segments* MM′ *et le lieu* S *de leurs extrémités* M *et* M′.

4° *Montrer que ce dernier lieu* S *est une courbe que l'on peut définir comme l'enveloppe de quatre familles de cercles qui touchent chacun la courbe en deux points. Trouver le lieu des centres de ces cercles et prouver que la courbe* S *peut se reproduire de trois manières par inversion.*

5° *Aux extrémités* M, M′ *de chaque segment divisé harmoniquement par les hyperboles* H, *on mène les tangentes à la courbe* S ; *trouver le lieu du point de rencontre de ces tangentes.*

**Solution analytique.** — Prenons les droites rectangulaires données, $Ox$ et $Oy$, pour axes de coordonnées. Nous pouvons écrire de suite l'équation générale des hyperboles équilatères qui rencontrent $Oy$ en deux points symétriques par rapport à O ; cette équation est

$$x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\mu x + \nu = 0;$$

elle donne, pour abscisses des points de rencontre avec $Ox$, les racines de l'équation du second degré

$$x^2 - 2\mu x + \nu = 0;$$

d'autre part, les abscisses des points A et B sont racines de l'équation

$$x^2 - (a+b)x + ab = 0.$$

Si alors on exprime que ces deux couples de racines se divisent harmoniquement, on a, en appliquant la relation connue $(AC' + CA' - 2BB' = 0)$ :

$$ab + \nu - \mu(a+b) = 0;$$

on déduit de là $\nu = \mu(a+b) - ab$, et l'équation générale des hyperboles H est

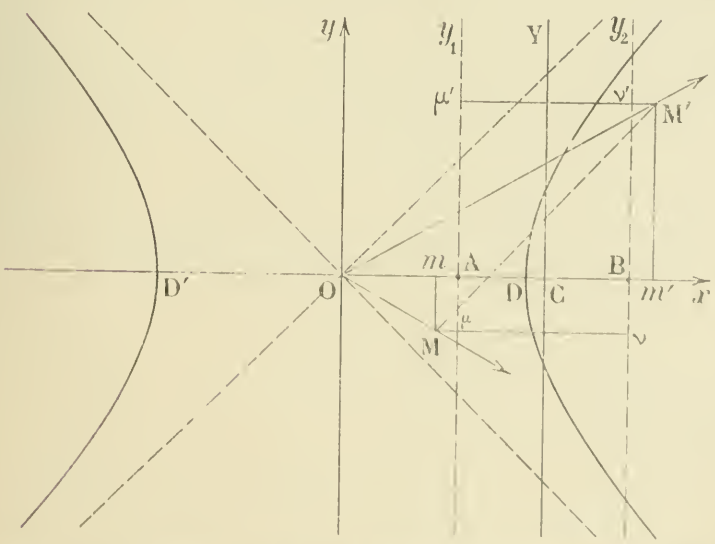
$$H \equiv x^2 + 2\lambda xy - y^2 - 2\mu x + \mu(a+b) - ab = 0,$$

ou

$$H \equiv x^2 - y^2 - ab + 2\lambda xy + \mu(a+b-2x) = 0.$$

Les hyperboles H forment donc un réseau de coniques dont les coniques de base sont

$$x^2 - y^2 - abz^2 = 0, \qquad xy = 0, \qquad z[(a+b)z - 2x] = 0.$$




1° Cela posé, désignons par $x$ et $y$ les coordonnées d'un point quelconque M du plan ; la polaire de ce point par rapport à l'une quelconque des coniques du réseau $(\lambda, \mu)$ a pour équation

$$P_1 + \lambda P_2 + \mu P_3 = 0,$$

en désignant par $P_1$, $P_2$, $P_3$ les premiers membres des polaires du point M par rapport aux coniques de base du réseau,

$$P_1 \equiv xX - yY - ab, \quad P_2 \equiv xY - yX,$$

et

$$P_3 \equiv -X + a + b - x.$$

Pour que cette polaire passe par un point fixe, quand $\lambda$ et $\mu$ varient, il faut et il suffit que les trois droites $P_1 = 0$, $P_2 = 0$, $P_3 = 0$ passent par le même point. Si donc on appelle M′ ce point, $x'$, $y'$ ses coordonnées, les coordonnées des deux points M et M′ seront liées par les trois équations

$$\left.\begin{aligned} xx' - yy' - ab &= 0, \\ xy' + yx' &= 0, \\ x + x' - a - b &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Ce sont trois équations à quatre inconnues, $x$, $y$, $x'$, $y'$ ; il y a donc une infinité de couples de points M et M'. La seconde équation nous donne $\frac{y'}{x'} = -\frac{y}{x}$ ; nous pouvons donc remarquer en passant que les droites OM, OM' sont également inclinées sur les axes.

Choisissons maintenant les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ de façon que les trois dérivées partielles de H aient une solution commune non nulle ; nous aurons ainsi une hyperbole réduite à deux droites et la solution commune donnera les coordonnées du centre de cette hyperbole. Or les équations obtenues ainsi sont

$$x + \lambda y - \mu = 0,$$
$$\lambda x - y = 0,$$
$$-\mu x + \mu(a + b) - ab = 0,$$

et il suffit de les comparer aux équations (1) pour voir qu'elles deviennent identiques à celles-ci pour $\lambda = -\frac{y'}{x}$, $\mu = \frac{ab}{x}$ ; par conséquent à toute extrémité M' de l'un des segments ainsi trouvés correspond une hyperbole réduite à deux droites et une seule, qui a son centre au point conjugué M de M'. D'ailleurs rien ne distingue M de M' et le même résultat s'étend aux deux extrémités de l'un de ces segments, quel qu'il soit.

2° La troisième équation (1) donne $x' = a + b - x$ ; si l'on porte cette valeur dans la première, on obtient

$$yy' = -(x - a)(x - b) ;$$

d'ailleurs $a - x = x' - b$, $b - x = x' - a$ ; on a donc les deux équations

$$yy' = (x - a)(x' - a),$$
$$yy' = (x - b)(x' - b).$$

Si l'on se reporte à la figure où les distances des points M, M' aux droites $Ox$, $Ay_1$ et $By_2$ ont été désignées par $Mm$, $M'm'$, $M\mu$, $M'\mu'$, $M\nu$, $M'\nu'$, les deux équations précédentes s'écrivent

$$Mm.M'm' = M\mu.M'\mu' \quad \text{et} \quad Mm.M'm' = M\nu.M'\nu',$$

où les segments employés sont pris avec leurs signes. Ces équations expriment justement qu'il y a une conique ayant pour foyers les points M, M' et tangente aux droites $Ox$, $Ay_1$ et $By_2$. La droite $Ox$ étant bissectrice de l'angle des rayons OM et OM', cette conique touche l'axe des $x$ au point O. Quant aux points de contact avec les deux autres droites, ils varient avec le segment MM'.

3° La troisième des équations (1) peut s'écrire $\frac{x + x'}{2} = \frac{a + b}{2}$ et montre que le lieu du milieu de la distance des points M et M' est la droite CY équidistante de $Ay_1$ et $By_2$. Pour avoir le lieu du point M, il n'y a qu'à éliminer $x'$ et $y'$ entre les équations (1). Les deux premières donnent

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{-y} = \frac{ab}{x^2 + y^2},$$

et en portant la valeur de $x'$ dans la dernière équation, on obtient

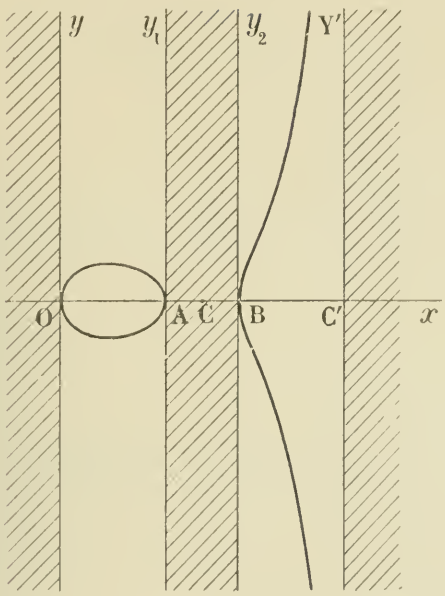
$$(x - a - b)(x^2 + y^2) + abx = 0. \qquad (2)$$

Tel est le lieu du point M et aussi du point M', car rien ne distingue, dans les calculs faits, le point M du point M'.

Ce lieu est une cubique circulaire, symétrique par rapport à $Ox$, ayant pour asymptote réelle la droite $x = a + b$, et tangente à $Oy$ au point O. Pour achever de la construire, il suffit d'écrire ainsi son équation :

$$y^2(x - a - b) + x(x - a)(x - b) = 0 ;$$

sous cette forme, on voit que la courbe rencontre $Ox$ aux trois points O, A, B, qu'il n'y a pas de points




de la courbe à gauche de $Oy$, à droite de $CY'$ $(x - a - b = 0)$, ni entre $Ay_1$ et $By_2$. La courbe a donc bien la forme ci-contre.

4° Cherchons les systèmes de cercles doublement tangents à cette courbe. Pour cela représentons par

$$x^2 + y^2 = 2z(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 2Pz$$

l'équation de l'un de ces cercles ; il rencontre la courbe

$$(x^2 + y^2)(x - az - bz) + abxz^2 = 0$$

aux mêmes points que la courbe

$$z[2P(x - az - bz) + abxz] = 0.$$

Si l'on supprime la solution $z = 0$, qui donne les deux points cycliques, il reste la conique

$$2P(x - az - bz) + abxz = 0,$$

qui contient les quatre points de rencontre à distance finie ; de sorte que l'équation générale des coniques qui passent en ces quatre points est

$$2P(x - az - bz) + abxz + \theta(x^2 + y^2 - 2Pz) = 0,$$

ou $$2PQ + abxz + \theta(x^2 + y^2) = 0,$$

en posant $$Q = x - (a + b + \theta)z.$$

En exprimant que le premier membre de cette équation est un carré parfait, on aura les relations qui doivent exister entre $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\theta$ pour que le cercle proposé soit doublement tangent à la cubique. On obtient ce résultat en écrivant que les trois dérivées partielles par rapport à $x$, $y$, $z$, annulées, ont une infinité de solutions, c'est-à-dire se réduisent à une équation unique, ou enfin que deux d'entre elles sont conséquences de l'autre. Si nous ajoutons des inconnues auxiliaires, P et Q, par exemple, le même degré d'indétermination doit exister, et nous aurons finalement à exprimer que dans le système suivant de cinq équations linéaires et homogènes entre cinq inconnues, $x$, $y$, $z$, P, Q, il y a deux équations qui sont conséquences des trois autres :

$$\left.\begin{aligned}
&\theta x + \frac{ab}{2}z + \alpha Q + P = 0,\\
&\theta y + \beta Q = 0,\\
&\frac{ab}{2}x + \gamma Q - (a + b + \theta)P = 0,\\
&Q = x - (a + b + \theta)z,\\
&P = \alpha x + \beta y + \gamma z.
\end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Si $\theta$ n'est pas nul, les trois premières équations donnent

$$x = \frac{2P(a + b + \theta) - 2\gamma Q}{ab},$$

$$y = -\frac{\beta Q}{\theta},$$

$$z = -\frac{2\alpha Q + P + \theta\dfrac{2P(a + b + \theta) - 2\gamma Q}{ab}}{ab};$$

en portant ces valeurs dans les deux dernières équations et exprimant qu'elles deviennent identiques, c'est-à-dire que les coefficients de P et de Q sont nuls, nous obtenons les trois relations

$$a^2b^2 + 2\gamma ab - 2\theta(a + b + \theta) - 2abx(a + b + \theta) = 0,$$

$$(a + b + \theta)\theta^2 + (a + b)\theta + ab = 0,$$

$$\frac{a^2b^2\beta^2}{\theta} + 4abx\gamma - 4\theta\gamma^2 = 0.$$

La seconde donne trois valeurs de $\theta$, $\theta = -a-b$, $\theta = -a$, $\theta = -b$; les deux autres donnent les lieux des centres et les valeurs de $\gamma$ qui correspondent aux divers centres. La première devient successivement

$$\begin{array}{ll} \text{pour } \theta = -a-b, & 2\gamma = -ab, \\ \text{pour } \theta = -a, & 2\gamma = ab - 2b\alpha, \\ \text{pour } \theta = -b, & 2\gamma = ab - 2a\alpha\,; \end{array}$$

en portant à chaque fois les valeurs de $\theta$ et $\gamma$, qui sont dans la même ligne, dans la dernière équation, on obtient, pour lieux des centres, trois paraboles qui correspondent respectivement aux trois valeurs de $\theta$

$$\left.\begin{array}{l} \beta^2 + 2(a+b)\alpha - (a+b)^2 = 0, \\ \beta^2 + 2a\alpha - a^2 = 0, \\ \beta^2 + 2b\alpha - b^2 = 0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Toutes ces paraboles ont l'origine pour foyer.

Donc déjà de trois façons la cubique trouvée, S, est l'enveloppe d'une famille de cercles avec chacun desquels elle a un double contact, et le lieu des centres de chaque famille est une conique, une parabole ayant l'origine pour foyer. Pour achever de définir les familles de cercles, interprétons les relations qui contiennent $\gamma$ ; chacune d'elles est de la forme

$$A\alpha + B\beta + \gamma + C = 0\,;$$

elle exprime donc que le cercle $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ est orthogonal au cercle fixe A, B, C, ou

$$x^2 + y^2 - 2Ax - 2By - 2C = 0.$$

Dans le cas actuel, les trois cercles fixes sont :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } \theta = -a-b, & x^2 + y^2 - ab = 0, \\ \text{pour } \theta = -a, & x^2 + y^2 - 2bx + ab = 0, \\ \text{pour } \theta = -b, & x^2 + y^2 - 2ax + ab = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Le premier est le cercle décrit de l'origine comme centre avec OD pour rayon (1re figure) ; les deux autres ont pour centres B et A et sont orthogonaux au premier ; ils sont aussi orthogonaux entre eux.

Voyons maintenant si $\theta = 0$ (qui a été rejeté) fournit d'autres modes de généralisation analogues. Pour $\theta = 0$, le système (3) se réduit, en ne considérant plus P et Q comme des inconnues, à

$$\frac{ab}{2}z + \alpha Q + P = 0,$$
$$\beta Q = 0,$$
$$\frac{ab}{2}x + \gamma Q - (a+b)P = 0\,;$$

la seconde équation donne $\beta = 0$; P et Q se réduisent à $\alpha x + \gamma z$, $x - (a+b)z$; remplaçons-les par ces valeurs dans les deux équations qui restent, exprimons qu'elles sont alors identiques, et nous aurons une autre condition,

$$2\gamma - 2(a+b)\alpha + ab)^2 + 16\alpha\gamma(a+b) = 0.$$

Il y a donc un quatrième mode de génération de ce genre par un système de cercles ayant leurs centres sur $Ox$ et du second ordre comme les autres systèmes. Une solution de ce genre était presque évidente *a priori*, à cause de la symétrie de la cubique par rapport à $Ox$. Il importe toutefois de remarquer que les cercles de ce nouveau système ne sont orthogonaux à aucun cercle fixe.

Revenons maintenant à l'un des autres systèmes; les cercles de chacun d'eux sont orthogonaux à un cercle fixe Γ, de centre $\omega$; la cubique est l'enveloppe de ces cercles ; donc elle touche chacun d'eux en deux points, N et N', qui sont sur une droite passant par le centre radical du système, $\omega$, et en appelant R le rayon du cercle Γ, on a toujours $\omega N . \omega N' = R^2$. La cubique se reproduit donc par inversion de trois façons différentes. Elle est anallagmatique ; les pôles d'anallagmatie sont O, A et B, et les puissances correspondantes, $ab$, $a^2 - ab$, $b^2 - ab$. Il n'y a pas d'autre anallagmatie, car il est facile de voir qu'à toute anallagmatie correspond un système de cercles doublement tangents à la courbe.

5° La tangente à la courbe S au point $x$, $y$ a pour équation

$$[x^2 + y^2 + 2x(x - a - b) + ab]X + 2y(x - a - b)Y - (a + b)(x^2 + y^2) + 2abx = 0.$$

Si l'on remonte alors aux formules (1) et que l'on pose $xx' = \rho$, $y = tx$, on a

$$x + x' = a + b, \qquad xx' = \rho, \qquad yy' = \rho - ab, \qquad y = tx, \qquad y' = -tx' ;$$

l'équation de la courbe S devient alors

$$\rho(1 + t^2) = ab ;$$

d'autre part, on obtient

$$x^2 + x'^2 = x^2(1 + t^2) = \frac{abx^2}{\rho} = \frac{abx}{x'},$$

puis

$$x^2 + y^2 + 2x(x - a - b) + ab = \frac{abx}{x'} - 2\rho + ab.$$

L'équation de la tangente s'écrit alors

$$(abc - 2\rho x')X - 2\rho tx'Y + 2ab\rho - abcx = 0,$$

en désignant par $c$ la somme $a + b$.

De même l'équation de la tangente au point $x'$, $y'$ est

$$(abc - 2\rho x)X + 2\rho txY + 2ab\rho - abcx' = 0.$$

En multipliant la première équation par $x$, la seconde par $x'$ et ajoutant, on obtient

$$(abc^2 - 4\rho^2)X + 2abc\rho - abc(x^2 + x'^2) = 0,$$

ou

$$(abc^2 - 4\rho^2)X + 4abc\rho - abc^3 = 0.$$

En retranchant les deux mêmes équations, on obtient

$$2\rho(x' - x)X + 2\rho tcY - abc(x' - x) = 0,$$

ou

$$2\rho tcY = (x' - x)(abc - 2\rho X) ;$$

il n'y a plus qu'à élever au carré pour faire disparaître $x$ et $x'$, et on aura finalement à éliminer $t$ et $\rho$, entre les trois équations

$$\rho(1 + t^2) = ab,$$

$$(abc^2 - 4\rho^2)X + abc(4\rho - c^2) = 0,$$

$$4t^2\rho^2c^2Y^2 = (c^2 - 4\rho)(2\rho X - abc)^2 ;$$

on élimine $t^2$ de la dernière en remplaçant $\rho b^2$ par $(ab - \rho)$, et on a

$$4\rho c^2Y^2(ab - \rho) = (c^2 - 4\rho)(2\rho X - abc)^2 ;$$

puis de la seconde on tire

$$4\rho^2X^2 - 4abc\rho X = abc^2X(X - c),$$

et la dernière équation devient

$$4Y^2(ab\rho - \rho^2) = ab(c^2 - 4\rho)(X^2 - cX + ab) ;$$

d'autre part la seconde équation peut s'écrire

$$4X(ab\rho - \rho^2) + ab(c^2 - 4\rho)(X - c) = 0.$$

L'élimination est alors immédiate et donne

$$Y^2(X - c) + X(X^2 - cX + ab) = 0,$$

ou

$$(X^2 + Y^2)(X - c) + abX = 0.$$

On retrouve ainsi la courbe S.

**Solution déduite de la théorie des réseaux.** — On sait que si l'on considère deux coniques $C = 0$ et $\Gamma = 0$, données, l'une par son équation ponctuelle, l'autre par son équation tangentielle et que si l'on désigne par $a$, $a'$, $a''$, $b$, $b'$, $b''$ les coefficients de la première équation, par $A_1$, $A'_1$, $A''_1$, $B_1$, $B'_1$, $B''_1$ ceux de

(1) Ce calcul m'a été communiqué par M. Blutel. On pourrait encore traiter la question en formant l'équation aux coefficients angulaires des rayons qui joignent l'origine aux points de contact de S avec les tangentes issues d'un point et exprimant que deux racines sont égales et de signes contraires. F. H.

la seconde, la relation $$aA_1 + a'A'_1 + a''A''_1 + 2bB_1 + 2b'B'_1 + 2b''B''_1 = 0$$
exprime que la conique C est circonscrite à une infinité de triangles autopolaires de Γ ; elle exprime aussi que Γ est inscrite dans une infinité de triangles autopolaires de C. On dit alors habituellement que la conique C est *harmoniquement circonscrite* à Γ et que celle-ci est *harmoniquement inscrite* dans C.

Exprimons qu'une conique C est harmoniquement circonscrite à trois coniques $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ ; nous aurons trois relations linéaires entre les coefficients ponctuels de C et par suite les coniques C formeront un réseau ponctuel. Exprimons de même qu'une conique Γ est harmoniquement inscrite dans trois des coniques C, $C_1$, $C_2$, $C_3$ ; nous aurons trois relations linéaires entre les coefficients tangentiels de Γ et par suite les coniques Γ formeront un réseau tangentiel. Ces deux réseaux sont associés de telle sorte que toute conique de l'un est harmoniquement circonscrite à (ou inscrite dans) toute conique de l'autre.

Dans le problème actuel, on donne les trois coniques suivantes du réseau tangentiel : le couple AB, $\Gamma_1 = (au + vc)(bu + vc) = 0$ ; le couple des points cycliques, $\Gamma_2 = u^2 + v^2 = 0$ ; le couple formé par le point O et le point à l'infini sur $Oy$, $\Gamma_3 = uv = 0$. Ceci résulte de ce que lorsque la conique Γ se réduit à deux points, la relation
$$aA_1 + a'A'_1 + \cdots + 2b''B''_1 = 0$$
exprime que les deux points sont conjugués par rapport à la conique C. Si, au contraire, la conique C se réduisait à deux droites, la relation exprimerait que ces droites sont conjuguées par rapport à Γ.

Les hyperboles H forment donc le réseau ponctuel associé au réseau tangentiel :
$$\lambda\Gamma_1 + \mu\Gamma_2 + \nu\Gamma_3 = 0.$$

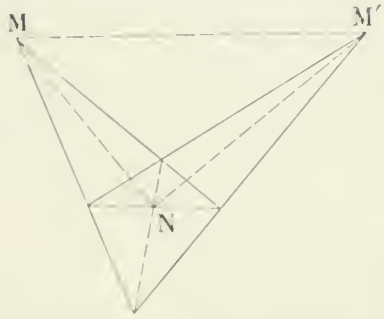
Les coniques de base de ce réseau sont : le couple $Ox$, $Oy$ ; le couple formé par la droite CY et la droite de l'infini ; enfin une hyperbole équilatère ayant pour axes $Ox$, $Oy$ et conjuguée du couple AB $(x^2 - y^2 - ab = 0)$.

1° On aura les couples de points M, M′ en cherchant les coniques du réseau tangentiel réduites à deux points ; il y en a une infinité. Soit $H_M$ l'une des hyperboles H ayant son centre en M ; elle se réduit à deux droites qui se coupent en M, sans quoi le conjugué M′ serait sur la droite de l'infini.

2° Le milieu de MM′ est toujours situé sur CY, puisque ces points sont conjugués par rapport à CY et la droite de l'infini. Considérons alors le triangle formé par l'axe $Ox$, $Ay_1$ et $By_2$ ; c'est un triangle autopolaire de l'hyperbole de base du réseau ponctuel. Considérons en outre la conique du réseau tangentiel réduite aux deux points M et M′, $PQ = 0$ ; toutes les coniques $PQ + \theta(u^2 + v^2) = 0$ font partie du réseau tangentiel ; elles ont toutes pour foyers les points M et M′. Si l'on détermine θ de façon que cette conique soit tangente à $Ay_1$, elle sera aussi tangente à $By_2$, puisque les foyers sont équidistants de ces droites ; alors, étant harmoniquement inscrite dans les coniques du réseau ponctuel, elle touchera le troisième côté $Ox$ du triangle autopolaire ; elle le touchera au point O, parce que le couple $Ox$, $Oy$ est conjugué par rapport à cette conique.

3° Le lieu du milieu de MM′ est CY. Le lieu des points M et M′ est le lieu des centres des hyperboles H réduites à deux droites ; c'est la Jacobienne S. C'est une courbe du 3e degré qui contient les couples primitifs ; par suite, elle passe aux points cycliques, au point à l'infini sur $Oy$, au point O et aux points A et B ; les données étant symétriques par rapport à $Ox$, elle aura $Ox$ pour axe de symétrie. Quand le point M vient en O, le point M′ passe à l'infini ; donc l'asymptote est la droite C′Y, parallèle à CY et à une distance double du point O.

4° Ce lieu étant une cubique circulaire, il en résulte qu'elle est susceptible du mode de génération indiqué de quatre façons différentes. Ici il y a une symétrie qui fait perdre une anallagmatie.




5° Soient $H_M$ et $H_{M'}$ les deux couples de droites du réseau ponctuel qui ont pour centres M et M′, et $M_1$, $M'_1$ un couple infiniment voisin de M, M′. La polaire de $M_1$ par rapport à $H_{M'}$ passe en M′ et en $M'_1$ ; donc c'est la tangente en M′ à la courbe S. Mais c'est aussi la polaire de M, puisque M et $M_1$ sont infiniment voisins. La tangente en l'un des points est donc la polaire de l'autre par rapport à la conique évanouissante du réseau qui a son centre au premier point.

Soit N le point de rencontre de ces deux tangentes ; le point N a même polaire par rapport à deux coniques du réseau, $H_M$ et $H_{M'}$ ; donc c'est l'un des points qui ont un conjugué, car on obtiendra ce conjugué en prenant le point de rencontre de MM′ avec la polaire de N par rapport à une troisième conique du réseau, qui n'appartient pas au faisceau $(H_M, H_{M'})$. Le point N est donc sur la courbe S. E. H.

Solution analytique à peu près complète : M. Hugon, à Nîmes.
Solutions géométriques : MM. Pages (Montpellier) ; Verbrugge (Louis le Grand).

## QUESTIONS PROPOSÉES

**379.** — Étant donné un ellipsoïde rapporté à ses axes et dont l'équation est $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ :

1° On coupe cet ellipsoïde par un plan P et l'on mène, à la surface, les normales dont les points d'incidence sont situés sur la courbe d'intersection. Prouver que le cône qui a son sommet à l'origine, et dont les génératrices sont respectivement parallèles à ces normales, est un cône du second degré ; trouver ensuite l'enveloppe des plans P pour lesquels ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit.

2° Par un point A, situé d'une manière quelconque dans l'espace, on mène les normales à l'ellipsoïde et dont les points d'incidence sont, comme l'on sait, sur une cubique gauche (Γ. Trouver l'équation de la surface engendrée par les sécantes doubles de cette cubique qui sont vues du centre de l'ellipsoïde sous un angle droit.

3° Trouver tous les plans qui coupent cette surface suivant quatre droites.

X. Antomari.

**380.** — Démontrer l'identité

$$2^{2n+1}\cdot\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\frac{1}{2}}\cdot\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{\sqrt{x}}\right)=e^{\sqrt{x}}.$$

**381.** — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans une conique S et circonscrit à une conique S′ est qu'en annulant le discriminant de $S+\lambda S'$ on obtienne une équation en $\lambda$ dans laquelle une racine soit égale à la somme des deux autres.

Cas particulier où les coniques sont des cercles.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**373.** — *Les sommets d'un triangle* ABC *décrivent une parabole, à laquelle les côtés* AC *et* BC *sont normaux en* A *et* B. *On demande :*

1° *Le lieu du milieu de* AB ;

2° *L'enveloppe de la droite* AB ;

3° *Le lieu du pied de la hauteur issue du point* C.

Soient
$$y^2-2px=0$$
l'équation de la parabole rapportée à son axe et à sa tangente au sommet, et $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point C.

Les ordonnées des pieds des normales issues de ce point sont racines de l'équation
$$y^3-2p(\alpha-p)y-2p^2\beta=0\ ;$$
en supprimant la racine $y=\beta$, on a pour les ordonnées de A et B
$$y^2+\beta y+2p^2=0.$$

Si on remplace $y^2$ par $2px$, on a l'équation de AB,
$$2px+\beta y+2p^2=0. \qquad (1)$$

1° Le milieu de AB est sur le diamètre conjugué de la direction de cette droite
$$2y+\beta=0. \qquad (2)$$

En éliminant $\beta$ entre (1) et (2), on a l'équation du lieu,
$$y^2-px-p^2=0,$$

qui représente une parabole ayant même axe que la parabole donnée.

2° On voit, d'après l'équation (1), que, quel que soit $\beta$, la droite AB passe par le point fixe

$$x = -p, \qquad y = 0.$$

3° La hauteur issue de C a pour équation

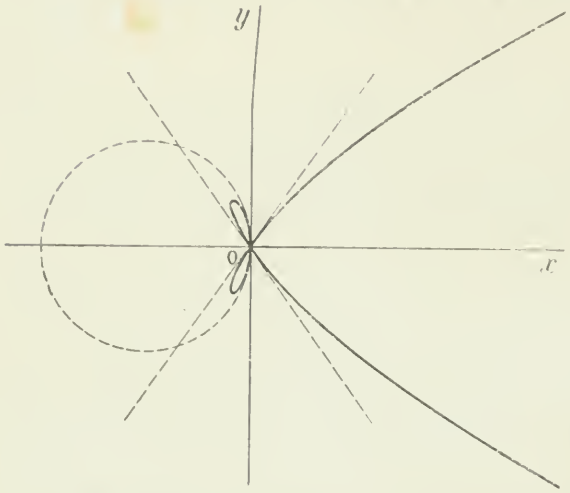
$$\frac{y-\beta}{x-\alpha} = \frac{\beta}{2p},$$

ou, en remplaçant $\alpha$ par $\frac{\beta^2}{2p}$,

$$4p^2(y-\beta) - \beta(2px - \beta^2) = 0. \qquad (3)$$

En éliminant $\beta$ entre (1) et (3), on aura l'équation du lieu. On trouve aisément

$$y^4 - y^2(x+p)(x+2p) - 2p(x+p)^3 = 0.$$




Transportons l'origine au point $x = -p$, $y = 0$; il vient

$$(x^2 + y^2)(y^2 + px(y^2 - 2x^2) = 0.$$

On voit ainsi que le lieu est une quartique à point triple, présentant deux branches paraboliques dans la direction de l'axe $Ox$.

On peut discuter cette courbe en posant $y = tx$, et on obtient aisément la forme ci-contre.

On peut remarquer que l'équation de la courbe s'écrit

$$y^2(x^2 + y^2 + px) - 2x^3 = 0,$$

ce qui montre que les deux boucles sont à l'intérieur du cercle

$$x^2 + y^2 + px = 0.$$

VASNIER, lycée de Versailles.

Ont résolu cette question : MM. A. Bailly, lycée de Dijon ; E. N. Barisien ; E. Barré, lycée de Douai ; H. Bonnard, lycée de Bordeaux ; Bostalot, lycée Louis-le-Grand ; J. L., à Douai ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; Martinet, lycée de Toulouse.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**382.** — On donne une hyperbole équilatère H

$$2xy - k^2 = 0.$$

A un point P du plan correspond un point P′ conjugué du premier sur le diamètre qui y passe.

1° Démontrer que si l'un des points P ou P′ décrit une droite D, l'autre décrit une conique C. Démontrer que les coniques C correspondant aux droites D qui passent par un point M se coupent en quatre points fixes. Trouver ces points.

2° Dans quel cas la droite D est-elle tangente à la conique C correspondante? Trouver l'enveloppe des coniques C dans ce cas. Indiquer dans quels cas la droite D coupe la conique C correspondante en des points réels ou en des points imaginaires.

3° Trouver le lieu des sommets des coniques C tangentes aux droites D correspondantes.

4° Former l'équation de la droite $\Delta$ menée par le centre d'une conique C parallèlement à la droite D correspondante. Trouver combien il passe par un point de droites $\Delta$ telles que les coniques C soient tangentes aux droites D. Trouver le lieu des projections de l'origine sur les droites $\Delta$ réalisant cette dernière condition.

Bioche.

**383.** — On donne un cercle, deux points A et B sur ce cercle et un point P en dehors. Par le point P on mène une sécante quelconque PCD, puis les droites AC et BD, qui se coupent au point M ; trouver le lieu du point M.

Ce lieu est une conique ; discuter la nature de cette conique, en supposant que le point P se déplace dans le plan.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 4 Janvier 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### RÉSUMÉ DES PROPRIÉTÉS DES FAISCEAUX DE CONIQUES

Il nous semble utile, après les problèmes qui ont été donnés aux derniers concours, de donner dans le journal d'abord un résumé des propriétés les plus saillantes des faisceaux de coniques, puis un résumé analogue pour les réseaux.

Lorsque les coefficients de l'équation ponctuelle d'une conique vérifient une équation linéaire, cette relation exprime que la conique est harmoniquement circonscrite à une conique donnée, celle dont l'équation tangentielle a pour coefficients ceux qui entrent dans la relation donnée. Si la seconde conique se réduit à deux points distincts, la relation exprime qu'ils sont conjugués par rapport à la première ; si la seconde conique se réduit à deux points confondus, la relation exprime que la première conique passe au point du plan qui coïncide avec eux.

Lorsque les coefficients de l'équation ponctuelle d'une conique variable vérifient quatre équations linéaires, cette conique engendre un *faisceau linéaire ponctuel*.

Son équation générale peut prendre la forme $\lambda S + \lambda_1 S_1 = 0$, $S$ et $S_1$ étant deux coniques données, et $\frac{\lambda}{\lambda_1}$ ou $\frac{\lambda_1}{\lambda}$ un paramètre variable.

1° Les coniques d'un faisceau sont toutes circonscrites à un même quadrangle ; elles ont en commun un même triangle autopolaire, le triangle diagonal du quadrangle (triangle des points diagonaux, points de concours des trois couples de côtés opposés). Il n'y en a pas d'autre qui soit commun. Il y a trois de ces coniques et trois seulement qui se réduisent à deux droites ; ce sont les couples des côtés opposés du quadrangle.

2° Il y a une et une seule de ces coniques qui passe en un point donné arbitrairement dans le plan ; les sommets du quadrangle font seuls exception.

3° Il y a deux de ces coniques qui sont tangentes à une droite (elles peuvent avoir leurs coefficients imaginaires). Il y a donc deux paraboles dans le faisceau ; mais elles peuvent être imaginaires ou confondues.

4° Sur une droite quelconque du plan les coniques du faisceau tracent une involution dont les points doubles sont les points de contact avec cette droite des coniques du faisceau qui la touchent.

Dans une involution il y a toujours un couple qui divise harmoniquement un couple donné.

Il y a donc toujours une hyperbole équilatère dans le faisceau, et une seule, en général ; s'il y en a plus d'une, toutes les coniques réelles du faisceau sont des hyperboles équilatères, les paraboles du faisceau sont alors imaginaires et touchent la droite de l'infini aux points cycliques. — S'il y a une ellipse réelle dans le faisceau, il y a des paraboles réelles. Si les deux paraboles sont réelles, il y a des ellipses réelles dans le faisceau.

5° On peut prendre pour coniques de base d'un faisceau deux coniques différentes du faisceau. Prenons l'hyperbole équilatère rapportée à ses asymptotes ; le faisceau sera alors représenté par

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f + \lambda(2xy + h) = 0 ;$$

pour $\lambda = -b$, on a une conique dont les axes sont parallèles aux asymptotes de l'hyperbole équilatère. Prenons cette conique comme seconde conique de base ; le faisceau sera représenté par

$$ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + f + \lambda(2xy + h) = 0.$$

La conique considérée est une ellipse ou une hyperbole, suivant que les paraboles du faisceau sont réelles ou imaginaires. Quand c'est une ellipse, c'est celle qui a l'excentricité minima et ses diamètres conjugués égaux sont parallèles aux axes des deux paraboles.

6° Les polaires d'un point donné dans le plan, par rapport aux coniques d'un faisceau, passent toutes par le même point. Tout point a donc un conjugué et un seul, sauf les sommets du triangle autopolaire qui ont chacun une infinité de conjugués.

7° Le lieu des pôles d'une droite fixe est une conique circonscrite au triangle autopolaire ; il en est ainsi en particulier du lieu des centres.

Nous laissons aux élèves le soin de faire eux-mêmes les démonstrations et de traiter les exercices suivants :

Trouver combien il y a de coniques du faisceau harmoniquement circonscrites à une conique donnée, ou harmoniquement inscrites dans une conique donnée, ou ayant un couple de points conjugués donnés, ou semblables à une conique donnée, ou ayant pour foyer un point convenablement choisi.

Lieux des foyers, des sommets, des points de contact avec une droite mobile autour d'un point, des milieux de ces points de contact. Enveloppe des axes, des directrices, des polaires d'un point.

Trouver les propriétés corrélatives d'un faisceau linéaire tangentiel.

## GÉOMÉTRIE

**366.** — *Dans un plan on considère deux cercles variables* A, B *rencontrant une droite fixe, le premier en deux points donnés, le second en deux points également donnés.*

*Les deux cercles* A, B *sont assujettis à la condition d'avoir pour longueur d'une tangente commune une quantité donnée.*

*Déterminer pour tous les couples de cercles tels que* A, B :

1° *Le lieu des points de contact des tangentes communes ;*

2° *L'enveloppe de la ligne des centres ;*

3° *Le lieu des centres de similitude. On distinguera les parties du lieu qui correspondent à un centre de similitude direct de celles qui correspondent à un centre de similitude inverse.*

1° Représentons par $x$ la distance à un point O pris sur la droite ABA'B' du point de rencontre avec cette droite d'une des tangentes communes (T) répondant à la question, et par $a, b, a', b'$, les distances des points A, B, A', B' à ce même point O. On doit avoir

$$\sqrt{(x-a)(x-b)} \pm \sqrt{(x-a')(x-b')} = l, \qquad (1)$$

où l'on prendra le signe + ou — suivant que la tangente commune sera intérieure ou extérieure. L'équation (1) débarrassée des radicaux peut s'écrire

$$\{l^2 - [(x-a)(x-b) + (x-a')(x-b')]\}^2 - 4(x-a)(x-b)(x-a')(x-b') = 0$$

ou

$$l^4 - 2l^2[(x-a)(x-b) + (x-a')(x-b')] + [(a+b-a'-b')x + a'b' - ab]^2 = 0. \qquad (2)$$

Donc les tangentes (T) pivoteront autour de deux points fixes I et J situés sur la droite ABA'B' et dont les distances au point O sont les racines de l'équation (2).

Soient M et M' les points de contact d'une tangente (T) passant par I.

$$IM = \sqrt{IA.IB} = C^{te},$$
$$IM' = \sqrt{IA'.IB'} = C^{te}.$$

Le lieu des points de contact se composera donc de deux circonférences de centre I. On obtiendrait de même pour lieu des points de contact des tangentes issues de J deux circonférences de centre J.

2° Dès lors H et H' étant les milieux des segments AB, A'B', la seconde partie du problème revient à la question suivante :

Etant données deux circonférences concentriques de centre I (*fig.* 1), aux extrémités M et M′ d'un rayon variable, on mène les tangentes que l'on prolonge jusqu'à leurs points de rencontre O et O′ avec les perpendiculaires élevées aux points H et H′ au diamètre HHH′. Enveloppe de la droite OO′.

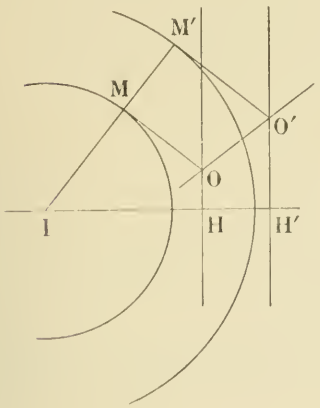


*Fig.* 1

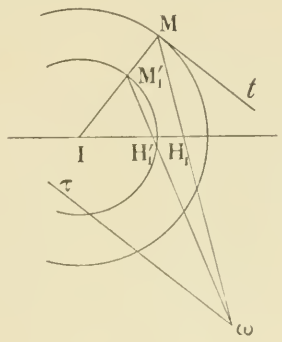


*Fig.* 2

Transformons par polaires réciproques en prenant le cercle IM pour cercle directeur ; on est ramené au problème suivant : Etant données deux circonférences concentriques et un rayon variable qui les rencontre en M et $M'_1$ (*fig.* 2), on joint M et $M'_1$ à deux points fixes $H_1$, $H_1$ situés sur un même diamètre. Lieu du point de rencontre ω des droites $MH_1$, $M'_1H'_1$.

Le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle $IMH_1$ coupé par la transversale $M_1H_1\omega$ donne

$$\frac{\omega M}{\omega H_1} \times \frac{H'_1H_1}{H'_1I} \times \frac{M_1I}{M'_1M} = 1,$$

d'où

$$\frac{\omega M}{\omega H_1} = C^{te}$$

et par suite

$$\frac{H_1\omega}{H_1M} = C^{te}.$$

Le lieu des points ω est une circonférence (C) homothétique de la circonférence IM, $H_1$ étant le centre d'homothétie. L'enveloppe de la ligne des centres se composera donc de deux coniques admettant pour foyers, l'une le point I, l'autre le point J, et pour axe focal commun la droite ABA′B′.

3° Nous devons chercher le lieu des points d'intersection d'une tangente (T) avec la ligne des centres correspondante ; ou, transformant encore par polaires réciproques et nous reportant à la figure 2, l'enveloppe de la perpendiculaire ωτ abaissée de ω sur $IMM'_1$. Or, cette enveloppe n'est autre que la circonférence (C) trouvée dans la seconde partie, car la droite ωτ est tangente à cette circonférence comme étant parallèle à la tangente Mt menée à la circonférence IM au point M homologue de ω.

Le lieu des centres de similitude se compose donc des deux coniques trouvées précédemment. Soit un centre de similitude correspondant à un point N d'une des deux coniques compris entre les parallèles HO, H′O′. La tangente en N à la conique coupera ces parallèles en deux points qui seront les centres correspondants. Le point N étant intérieur au segment formé par la ligne des centres sera centre de similitude interne. On verrait de même que les parties du lieu extérieures à la région limitée par les parallèles HO, H′O′ correspondent à des centres de similitude externe.

Victor BERTRAND, Répétiteur au Lycée de Douai.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**367.**— *Étant donnée une conique* Σ, *une droite* D *et un point* P, *on joint un point variable* M *à deux points fixes* I *et* J *de* Σ *et on considère les coniques* S *passant par* P *inscrites dans l'angle* IMJ, *la corde de contact étant la droite* D.

1° *Lieu des pôles d'une droite fixe* Δ *par rapport aux coniques* S, *quand* M *décrit une conique* Σ.

2° *Étudier le lieu quand* Σ *et* Σ′ *coïncident.*

3° *Quand* Σ *et* Σ′ *coïncidant,* Δ *se confond avec* IJ.

**Première solution.** — Faisons une transformation homographique telle que les points I et J deviennent les points cycliques du plan ; les coniques S auront alors le point M pour foyer et la droite D pour directrice correspondante.

Prenons pour origine le point P, l'axe des $x$ étant perpendiculaire à la droite D, et l'axe des $y$ étant parallèle à cette droite.

Designons par

$$x - d = 0$$

l'equation de la droite D, et par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point M.

1° L'équation générale des coniques S est alors

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - e^2(x - d)^2 = 0$$

avec la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 - e^2 d^2 = 0,$$

et il faut chercher le lieu des pôles d'une droite $\Delta$ par rapport à ces coniques quand le point M décrit une conique $\Sigma'$.

L'équation des coniques S s'écrit

$$x^2(1 - e^2) + y^2 + 2x(de^2 - \alpha) - 2\beta y = 0, \qquad (S)$$

$e^2$ ayant la valeur $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2}$.

Les coordonnées du pôle de la droite

$$ux + vy + w = 0 \qquad (\Delta)$$

sont données par les équations

$$\frac{x(1 - e^2) + de^2 - \alpha}{u} = \frac{y - \beta}{v} = \frac{x(de^2 - \alpha) - \beta y}{w}.$$

Au lieu d'éliminer $\alpha$ et $\beta$ entre ces équations et l'équation qu'on obtiendrait en écrivant que le foyer décrit une conique, nous résoudrons ces équations par rapport à $x$ et $y$.

On obtient

$$x = \frac{e^2 d(v\beta + w) + u\beta^2 - v\alpha\beta - w\alpha}{e^2(v\beta + du + w) - (u\alpha + v\beta + w)},$$

$$y = \frac{e^2 d^2 v + e^2(\beta du - 2d\alpha v + w\beta) + v\alpha^2 - u\alpha\beta - w\beta}{e^2(v\beta + du + w) - (u\alpha + v\beta + w)},$$

et en remplaçant $e^2$ par $\dfrac{\alpha^2 + \beta^2}{d^2}$, on a

$$x = \frac{d(\alpha^2 + \beta^2)(v\beta + w) + d^2(u\beta^2 - v\alpha\beta - w\alpha)}{(\alpha^2 + \beta^2)(v\beta + du + w) - d^2(u\alpha + v\beta + w)},$$

$$y = \frac{v(\alpha^2 + \beta^2)^2 + (\alpha^2 + \beta^2)(\beta du - 2d\alpha v + w\beta) + d^2(v\alpha^2 - u\alpha\beta - w\beta)}{(\alpha^2 + \beta^2)(v\beta + du + w) - d^2(u\alpha + v\beta + w)}.$$

Si le point $\alpha$, $\beta$ décrit une conique, on peut supposer que $\alpha$ et $\beta$ sont des fractions dont les termes sont des trinomes du deuxième degré par rapport à une variable $t$, les dénominateurs étant les mêmes.

En remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par ces valeurs dans les expressions de $x$ et de $y$, on voit que le point $(x, y)$ décrit une courbe unicursale du huitième degré.

2° La conique $\Sigma$ passant par les points cycliques est un cercle ; il en sera de même de la conique $\Sigma'$ ; on aura donc une relation de la forme

$$\alpha^2 + \beta^2 = A\alpha + B\beta + C,$$

et l'on voit tout de suite que le lieu s'abaisse au quatrième degré.

On peut d'ailleurs poser

$$\alpha = a + R\cos\varphi,$$
$$\beta = b + R\sin\varphi.$$

$a$, $b$ désignant les coordonnées du centre du cercle $\Sigma'$ et R le rayon ; les numérateurs de $x$ et de $y$ et leur dénominateur commun deviennent des fonctions du second degré de $\sin\varphi$ et de $\cos\varphi$.

3° Enfin si la droite $\Delta$ se confond avec IJ, cette droite est à l'infini : on a $u = 0$, $v = 0$, et le pôle de la droite $\Delta$, ou le centre de la courbe a pour coordonnées

$$x = \frac{d(\alpha^2 + \beta^2 - d\alpha)}{\alpha^2 + \beta^2 - d^2},$$

$$y = \beta.$$

En remplaçant $\alpha$ et $\beta$ par les valeurs $a + \mathrm{R}\cos\varphi$ et $b + \mathrm{R}\sin\varphi$, on obtient

$$x = \frac{d[\mathrm{R}(2a - d)\cos\varphi + 2b\mathrm{R}\sin\varphi + a^2 + b^2 + \mathrm{R}^2 - ad]}{2a\mathrm{R}\cos\varphi + 2b\mathrm{R}\sin\varphi + a^2 + b^2 + \mathrm{R}^2 - d^2},$$

$$y = b + \mathrm{R}\sin\varphi.$$

Si dans ces équations on remplace $\cos\varphi$ et $\sin\varphi$ par $\frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\frac{2t}{1 + t^2}$, puis si on réduit au même dénominateur, on obtient deux fractions rationnelles du 4e ordre. Donc le lieu est encore une courbe unicursale du 4e ordre, et l'on n'aperçoit pas nettement la différence qu'il y a entre les deux derniers cas.

**Seconde solution (géométrique).** — Pour résoudre ce problème nous nous appuierons sur la généralisation suivante qui a été donnée du théorème de Chasles : Étant donnés deux faisceaux de droites tels qu'à une droite du premier faisceau en corresponde $m$ du second, et à une droite du second $p$ droites du premier, le lieu des points d'intersection des droites correspondantes des deux faisceaux est de degré $m + p$.

Cela posé, revenons au problème proposé ; on pourrait le résoudre directement par une méthode en tous points analogue à celle que nous allons indiquer, mais, pour simplifier, nous projetterons la figure de façon que la droite D passe à l'infini. Le point M est alors le centre de la conique dont MI et MJ sont les asymptotes.

Pour déterminer le degré du lieu cherché, nous chercherons alors en combien de points le lieu rencontre une droite quelconque LL'. Proposons-nous de trouver le lieu des centres des coniques passant par P, dont les asymptotes passent respectivement par les points I et J, et telles que le pôle de $\Delta$ par rapport à ces coniques soit sur LL'.

Soit JR une droite quelconque passant par J ; si cette droite est une asymptote, et si Q est le point d'intersection de IP avec JR, les hyperboles correspondantes sont tangentes à JR au point situé à l'infini sur cette droite, passent par P, et par le point P' de IP, tel que $\mathrm{IP} = \mathrm{P'Q}$ puisque I est sur la deuxième asymptote. Ces hyperboles forment donc un faisceau, et dans ce faisceau il y a deux coniques par rapport auxquelles les droites $\Delta$ et LL' sont conjuguées. Le lieu des pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un faisceau ponctuel est une courbe du second ordre. A toute droite JR correspondent donc deux droites issues de I, et réciproquement. Les points d'intersection des droites correspondantes des deux faisceaux, c'est-à-dire les centres des coniques du groupe considéré, décrivent donc une courbe (C) du quatrième degré, qui admet I et J comme points doubles, et qui coupe la conique $\Sigma'$ en huit points.

Huit coniques du groupe de l'énoncé sont telles que le pôle de $\Delta$ soit sur LL' et le lieu des pôles de $\Delta$ par rapport à ces coniques S est du huitième degré.

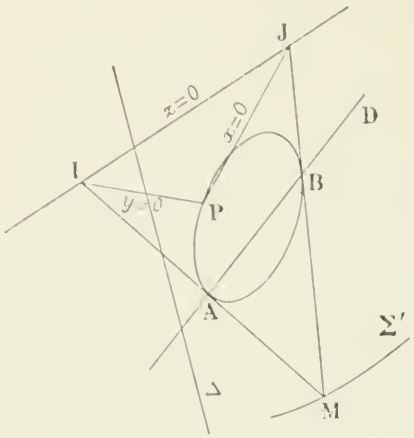
*Remarque.* — La démonstration ne suppose pas essentiellement que $\Sigma'$ soit une conique. Si $\Sigma'$ était une courbe du $n$e ordre, le lieu serait du $4n$e degré.

2° Lorsque $\Sigma$ et $\Sigma'$ coïncident, c'est-à-dire lorsque $\Sigma'$ passe par I et J, quatre des points d'intersection de (C) avec $\Sigma'$ coïncident toujours avec les points I et J. Le lieu véritable s'abaisse alors au quatrième degré. Mais on a alors deux points doubles correspondant au cas où M vient se confondre avec I ou J. En effet, lorsque M vient par exemple en J, les asymptotes sont JI et la tangente en J à $\Sigma$. Comme l'on connaît en outre le point P, l'hyperbole correspondante est facile à construire. Or, il y a une infinité de coniques S qui viennent se confondre avec cette hyperbole, et le pôle de $\Delta$ par rapport à ces coniques fait partie du lieu. De même pour le point I.

J. CLAIRIN. (Louis-le Grand.)

**Troisième solution.** — Nous prenons IPJ comme triangle de référence. Soient dans ce système $u_1$, $v_1$, $w_1$ les coordonnées de la droite D.

Soient $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point M qui décrit la conique $\Sigma$ ; $x$, $y$, $z$ sont des quantités proportionnelles à trois trinomes donnés, du second degré par rapport à un paramètre $t$.




Je vais former l'équation tangentielle de la conique S. A cet effet je forme d'abord l'équation tangentielle des points A et B. Le point A par exemple se trouve à l'intersection de la droite D, ayant pour coordonnées $u_0$, $v_0$, $w_0$, et de la droite IM $(Yz - Zy = 0)$ dont les coordonnées sont $0$, $z$, $-y$. L'équation tangentielle du point A est donc

$$P = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ 0 & z & -y \end{vmatrix} = 0 ;$$

de même l'équation tangentielle de B est

$$Q = \begin{vmatrix} u & v & w \\ u_0 & v_0 & w_0 \\ z & 0 & -x \end{vmatrix} = 0.$$

L'équation tangentielle de la conique S est alors

$$P.Q + \lambda(ux + vy + wz)^2 = 0.$$

Il faut déterminer $\lambda$ par la condition que S passe au point P. Je n'ai qu'à écrire pour cela que les deux tangentes issues de P sont confondues. Pour exprimer cette condition je n'ai qu'à faire $w = 0$ dans l'équation de S et écrire que la forme quadratique ainsi trouvée est un carré parfait. En faisant $w = 0$ dans l'équation de S, celle-ci se réduit à

$$[-uv_0x + v(u_0x + w_0z)][vu_0y - uv_0x + w_0z] + \lambda(ux + vy)^2 = 0.$$

Le discriminant de cette forme quadratique égalé à zéro nous donne la condition

$$4(v_0x(v_0y + w_0z) + \lambda x^2)[u_0y(u_0x + w_0z) + \lambda y^2] - [u_0v_0xy + (u_0x + w_0z)(v_0y + w_0z) - 2\lambda xy]^2 = 0,$$

qui peut s'écrire, en posant $H = u_0x + v_0y + w_0z$,

$$4(v_0xH - u_0v_0x^2 + \lambda x^2)[u_0yH - u_0v_0y^2 + \lambda y^2] - [2u_0v_0xy + w_0zH - 2\lambda xy]^2 = 0.$$

Le terme en $\lambda^2$ disparaît. Il reste, toutes réductions faites,

$$(4\lambda xy - w_0^2z^2)H^2 = 0.$$

En supprimant le facteur $H^2$ on a

$$\lambda = \frac{w_0^2z^2}{4xy}.$$

L'équation de S est donc $\qquad 4xyPQ + w_0^2z^2(ux + vy + wz)^2.$

Les dérivées partielles de cette fonction prises par rapport à $u$, $v$, $w$, et dans lesquelles je regarderai $u$, $v$, $w$ comme les coordonnées de $\Delta$, me donnent le pôle de $\Delta$. Je pose pour abréger

$$P = au + bv + cw,$$
$$Q = a'u + b'v + c'w,$$
$$R = ux + vy + wz.$$

J'obtiens ($\theta$ étant un facteur de proportionnalité)

$$\left.\begin{aligned} \theta X &= 2xy(a'P + aQ) + w_0^2z^2aR, \\ \theta Y &= 2xy(b'P + bQ) + w_0^2z^2xR, \\ \theta Z &= 2xy(c'P + cQ) + w_0^2z^3R. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Telles sont les coordonnées des points du lieu demandé en fonction rationnelle d'un paramètre $t$. Le lieu est une courbe unicursale. P, Q, R sont linéaires en $x$, $y$, $z$. Il en est de même de $a$, $b$, $c$, $a'$, $b'$, $c'$. Donc X, Y, Z sont des fonctions homogènes du quatrième degré en $x$, $y$, $z$. Or ces quantités sont proportionnelles à des fonctions du second degré en $t$. La courbe est du 8e ordre. Elle a $\frac{7.6}{2} = 21$ points doubles.

**2** Soient les égalités

$$\left.\begin{aligned} \theta x &= \alpha t^2 + 2\beta t + \gamma, \\ \theta y &= \alpha' t^2 + 2\beta' t + \gamma', \\ \theta z &= \alpha'' t^2 + 2\beta'' t + \gamma'', \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

qui représentent la conique $\Sigma'$. Si $\Sigma'$ passe en I et J, les deux racines $t_1$ et $t_2$ de l'équation $z = 0$ devront vérifier, l'une $x = 0$, l'autre $y = 0$. La conique $\Sigma$ pourra alors se mettre sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \Theta x &= \alpha(t - t_1)(t - t'), \\ \Theta y &= \alpha'(t - t_2)(t - t''), \\ \Theta z &= \alpha''(t - t_1)(t - t_2). \end{aligned}\right\} \qquad (3')$$

Si je substitue ces valeurs dans les coordonnées de la courbe, il est facile de voir que $(t - t_1)^2(t - t_2)^2$ se met en facteur partout et peut être supprimé. En effet, $(t - t_1)(t - t_2)$ se trouve en facteur une première fois dans $xy$ et dans $z$. Ensuite P et $a$ sont homogènes en $y$ et en $z$, Q et $a'$ homogènes en $x$ et en $z$. Donc $(t - t_1)(t - t_2)$ se trouve en facteur dans $(a'P + aQ)$, il se trouve aussi dans $z$. Le lieu s'abaisse au *quatrième degré*.

**3°** Supposons maintenant que $\Delta$ se confonde avec IJ. Les coordonnées de $\Delta$ sont 0, 0, 1. Il suffit de faire dans l'équation de la courbe $u = 0$, $v = 0$, $w = 1$. Les équations (1) s'écrivent alors, après suppression du facteur $z$,

$$\begin{aligned} \Theta X &= 2xy(v_0 - u_0x + v_0y + w_0z) + w_0^2z^2x, \\ \Theta Y &= 2xy(w_0(u_0x - v_0y + w_0z) + w_0^2z^2y, \\ \Theta Z &= -4xyzu_0v_0 + w_0^2z^3. \end{aligned}$$

Si je remplace $x, y, z$ par leurs valeurs tirées du système (2'), il est facile de voir que $(t - t_1)(t - t_2)$ est en facteur, et qu'il reste enfin une courbe du quatrième degré.

Ce cas ne diffère pas essentiellement du précédent.

*Remarque.* — La méthode précédente aurait été applicable à une courbe $\Sigma'$, unicursale et d'ordre $m$. On aurait trouvé une courbe unicursale d'ordre $4m$. En admettant que la courbe considérée passe $p$ fois aux points I et J, le degré se serait abaissé à $4m - 4p$.

L. CLAUZEL (Louis-le-Grand).

## PHYSIQUE ET CHIMIE

**364.** — *Un vase métallique a la forme d'une sphère de* 20cm *de rayon ; l'épaisseur de ses parois est un dixième de millimètre.*

*A* 0 *degré ce vase est plein d'air sous la pression de* 76cm *de mercure à* 0 *degré, qui est aussi la pression extérieure.*

*On chauffe le vase jusqu'à ce qu'il éclate sous l'effort des pressions intérieures ; la ligne de rupture se trouve dans un plan diamétral.*

*On demande à quelle température le vase a été porté, sachant que : 1° le coefficient de dilatation de l'air est* $\frac{1}{273}$ ; *2° le coefficient de dilatation du métal est négligeable ; 3° à la température de l'explosion, un fil de ce métal ayant* 1 *millimètre carré de section rompt sous un poids de* 30 *kilogrammes ; 4° la densité du mercure est* 13,6.

(*Bourses de licence, 1894.*)

La section de rupture, évaluée en millimètres carrés, vaut

$$2 \times \pi \times 200 \times 0{,}1 ;$$

l'effort nécessaire pour produire la rupture est donc, en grammes,

$$2 \times \pi \times 200 \times 0{,}1 \times 30000.$$

L'excès de la pression intérieure sur la pression extérieure, évalué en grammes par centimètre carré, vaut

$$76 \times 13{,}6 \times \frac{1}{273} \times x ;$$

la force résultant de cet excès de pression sur un hémisphère est égale à celle que le même excès

produirait sur la surface d'un grand cercle, et vaut, par conséquent, en grammes,

$$76 \times 13{,}6 \times \frac{1}{273} \times x \times \pi \times \overline{20}^2.$$

D'où

$$2 \times \pi \times 200 \times 0{,}1 \times 30000 = 76 \times 13{,}6 \times \frac{1}{273} \times x \times \pi \times \overline{20}^2,$$

ou, en simplifiant,

$$x = \frac{273 \times 3000}{76 \times 13{,}6} = 695^{\circ},6.$$

*Remarque.* — La donnée relative à la forme de la ligne de rupture est inutile. En effet, la tension T d'une enveloppe sphérique de rayon R est liée à l'excès de pression, P, qui règne à l'intérieur, par la relation

$$T = \frac{R}{2} P.$$

Ici, la tension devient égale à 30 kilogrammes par centimètre, car une section d'un centimètre de longueur et d'un dixième de millimètre de largeur a une surface d'un millimètre carré. On doit donc avoir, en prenant pour unités le centimètre et le poids du gramme,

$$30000 = \frac{20}{2} \times 76 \times 13{,}6 \times \frac{1}{273} \times x,$$

ce qui donne le même résultat.

---

**365.** — *L'analyse d'un sel d'argent a donné en centièmes :*

| | |
|---|---|
| *Carbone* | 7,895 |
| *Oxygène* | 21,053 |
| *Argent* | 71,052 |

*On sait, d'autre part, que l'acide de ce sel peut former avec le potassium deux sels, l'un comparable par sa composition au sel d'argent, l'autre contenant pour un même poids de carbone moitié moins de métal.*

*Calculer la formule de l'acide*

$$C = 12, \qquad O = 16, \qquad Ag = 108.$$

(*Bourses de licence, 1894.*)

En rapportant les poids à 108 d'argent, on trouve 12 de carbone et 32 d'oxygène. La formule la plus simple qui représente la composition du sel est donc $CO^2Ag$, et la formule la plus simple représentant la composition de l'acide $CO^2H$. Mais l'existence des deux sels de potassium exige la présence de deux poids atomiques d'hydrogène, ce qui donne

$$C^2O^4H^2 :$$

c'est la formule de l'acide oxalique.

---

## QUESTIONS PROPOSÉES

**384.** — D'un point P on mène les normales à un ellipsoïde et par les pieds de ces normales, les plans tangents.

1° Trouver le lieu des centres des quadriques $\Sigma$ tangentes à ces plans.

2° Parmi ces quadriques $\Sigma$, on considère celles qui sont concentriques à l'ellipsoïde; trouver le lieu des axes de ces quadriques.

3° Trouver le lieu des points P pour lesquels les quadriques $\Sigma$ sont de révolution et sont concentriques à l'ellipsoïde. (P. Puig.)

**385.** — On considère le folium de Descartes

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

et le cercle variable

$$x^2 + y^2 - 2\lambda x + y = 0.$$

Trouver le lieu des points de contact avec le cercle variable des tangentes communes au folium et au cercle et construire ce lieu. (Vasnier.)

**386.** — Un disque lumineux, d'éclat intrinsèque $k$ et de diamètre $a$, est placé perpendiculairement à l'axe principal d'une lentille et à une distance $p$ de cette lentille dont la distance focale est $f$ et le diamètre $b$. Calculer l'éclairement produit par les rayons réfractés sur un écran perpendiculaire à l'axe et placé à une distance quelconque, $x$, de la lentille.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1894. — 1re session).

**357.** — *La ligne de terre $xy$ étant tracée parallèlement aux grands côtés du cadre à une distance de 60mm au-dessous du milieu du cadre, on considère, dans le plan vertical, une parabole dont l'axe est la verticale $aa'$ placée au milieu du cadre, dont la directrice est la ligne de terre et dont le sommet $a$ est à 30mm au-dessus de la ligne de terre; cette parabole, en tournant autour de son axe, engendre un paraboloïde. On considère, d'autre part, un cône de révolution ayant pour sommet le sommet $aa'$ de la parabole et pour axe une parallèle $ab$, $a'b'$ à la ligne de terre; l'angle des génératrices de ce cône avec son axe est supposé égal à 45 degrés.*

*1° Construire les projections de l'intersection de ces deux surfaces, et représenter leur solide commun, en supposant le cône prolongé de part et d'autre de son sommet.*

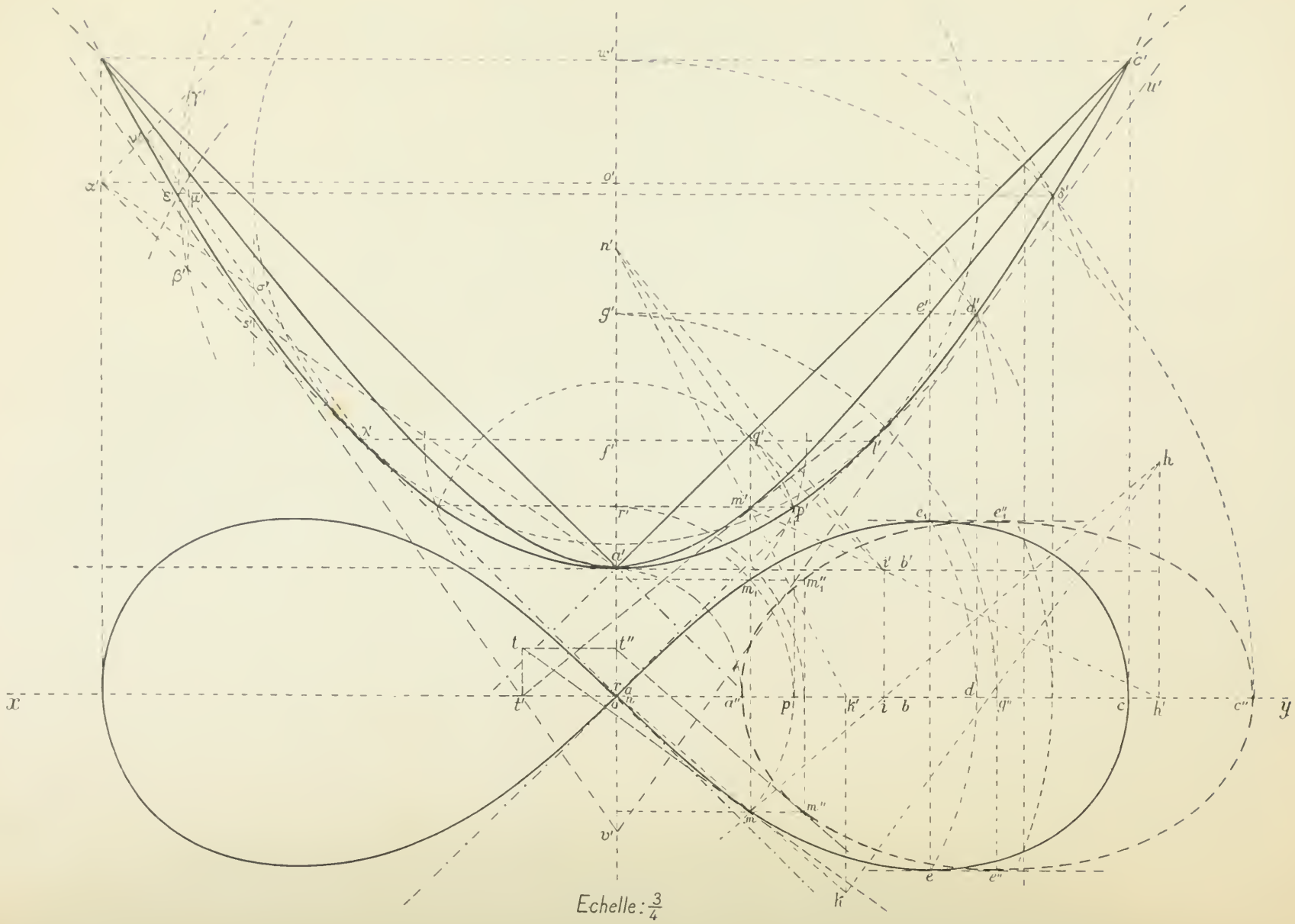
*2° Construire la projection de l'intersection sur un deuxième plan vertical ayant pour trace horizontale la perpendiculaire en $a$ à la ligne de terre.*

Nota. — *On indiquera à l'encre rouge la construction d'un point et de la tangente en ce point à la parabole et à chacune des projections de l'intersection.*

Le plan vertical de projection et le plan de profil de $a$, $a'$ sont des plans de symétrie pour les deux surfaces ; donc la projection verticale de l'intersection sera une conique et la projection horizontale sera une courbe du quatrième degré admettant pour axes de symétrie $xy$ et $aa'$. De plus la projection auxiliaire demandée sur le plan de profil de $a$, $a'$ sera une conique.

Pour obtenir un point $m$, $m'$ de l'intersection, nous emploierons une sphère de centre $a$, $a'$ ; si nous déterminons par la construction ordinaire un point $p$, $p'$ de la parabole méridienne principale du paraboloïde, le rayon de la sphère correspondante sera $ap'$. Cette sphère coupe le paraboloïde suivant le parallèle $pr$, $p'r'$ et le cône suivant le parallèle $m'q'$ ; d'où nous déduisons deux points $m$, $m'$ et $m_1$, $m'_1$ de l'intersection. La tangente $mt$, $m't'$ au point $m$, $m'$ est obtenue par la méthode des normales. Le rayon de la sphère auxiliaire peut varier de zéro jusqu'à $ac$ si $c'$ est le deuxième point de rencontre de la projection verticale $a'c'$ de la génératrice de contour apparent vertical du cône avec la projection verticale de la méridienne principale du paraboloïde. Cette sphère de rayon maximum donnera le point $c$, $c'$ de l'intersection; on a pris pour cela $a'm' = 2p = 12^{cm}$ si $p$ est le paramètre de la parabole.

Cherchons la nature de la projection verticale de l'intersection et pour cela déterminons ses asymp-


x
y
Echelle : 3/4

totes ; à cet effet nous prenons une sphère inscrite au paraboloïde, son centre a pour projection verticale $o'$ et son parallèle de contact est projeté en $l'\lambda'$. A cette sphère circonscrivons un cône homothétique au cône donné ; son contour apparent vertical sera $\beta'\alpha'\gamma'$. Ce cône touche la sphère suivant le parallèle de profil passant par $\lambda'$. Le cône et le paraboloïde circonscrits à la même sphère se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont de bout ; le point $\lambda'$ est un point commun aux projections verticales de ces courbes. Pour en avoir un second point, nous prenons une sphère auxiliaire de centre $oo'$ et, si $\delta'$ est un point déterminé sur la parabole méridienne, ayant pour rayon $o'\delta'$ ; elle coupe le cône suivant deux parallèles dont l'un est $\beta'\gamma'$ et le paraboloïde suivant le parallèle $\delta'\varepsilon'$, d'où un point $\mu'$ de la projection verticale cherchée $\lambda'\mu'$. A cette direction asymptotique $\lambda'\mu'$ correspond l'asymptote $s'v'$ obtenue en menant les diamètres $\sigma's'$ et $a's'$ conjugués de la direction $\lambda'\mu'$ dans les méridiennes principales des deux surfaces données et en traçant par leur point de rencontre $s'$ la parallèle à $\lambda'\mu'$. Le point $v'$ où cette asymptote coupe l'axe de symétrie de la conique est centre, et l'autre asymptote est $v'u'$ symétrique de $v's'$ par rapport à $v'o'$. Comme vérification $v'$ est symétrique de $a'$ par rapport à $a$, car l'hyperbole obtenue comme projection verticale de l'intersection a un foyer commun avec la parabole.

La projection horizontale dont nous avons les points sur les axes de symétrie, est une lemniscate. En effet, prenons $ay$ pour axe polaire et soit $am = \rho$, $\widehat{may} = \omega$ ; d'après le procédé de construction de $m$ on a, si R est le rayon $a'p'$ de la sphère auxiliaire,

$$f'q' = \rho \cos \omega = \frac{R}{\sqrt{2}}, \qquad \rho^2 = 2p.a'z', \qquad R^2 = \rho^2 + \overline{a'z}^2$$

$$\text{d'où} \qquad 2\rho^2 \cos^2 \omega = \rho^2 + \frac{\rho^4}{4p^2}, \qquad \text{d'où} \qquad \rho = 2p\sqrt{\cos 2\omega}$$

équation polaire d'une lemniscate. Les tangentes d'inflexion au point double $a$ de cette lemniscate sont les génératrices de contour apparent horizontal du cône.

Quant à la projection auxiliaire sur le plan de profil de $aa'$, c'est une ellipse tracée en traits discontinus ; nous avons obtenu les sommets $a''$ et $c''$ de son grand axe, ce qui donne le centre $y''$ et conduit aux sommets $e''$ et $e''_1$ du petit axe. Ces points se déduisent immédiatement de ceux correspondants obtenus sur la lemniscate ; la détermination de $y''$ mène aux deux points $e$ et $e_1$ de la lemniscate pour lesquels la tangente est parallèle à $xy$. Comme vérification, $ay'' = \frac{3p}{2} = 9^{cm}$. Au point $m$, $m$ correspond sur cette ellipse le point $m''$ ; la tangente en ce point est $m''t$.

Dans la mise à l'encre, nous avons supposé le plan vertical de projection enlevé et pour cela la ligne de terre $xy$ a été tracée en traits discontinus ; dans ces conditions la projection horizontale de la courbe d'intersection des deux surfaces est vue tout entière.

La recherche analytique des divers résultats trouvés précédemment est immédiate si nous prenons pour axe des $x$ la droite $ab$, $a'b'$, pour axe des $z$ la verticale de $aa'$ et pour axe des $y$ la perpendiculaire en $a$, $a'$ au plan ZAX. Le paraboloïde a alors pour équation

$$x^2 + y^2 - 2pz = 0.$$

Le cône a pour équation

$$x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

La projection verticale, c'est-à-dire la projection sur le plan ZAX, est $2x^2 - z^2 - 2pz = 0$.
L'équation de la projection horizontale est

$$(x^2 + y^2)^2 - 4p^2(x^2 - y^2) = 0.$$

L'équation de la projection sur le plan de profil de $a$, $a'$ sera

$$2y^2 + z^2 - 2pz = 0.$$

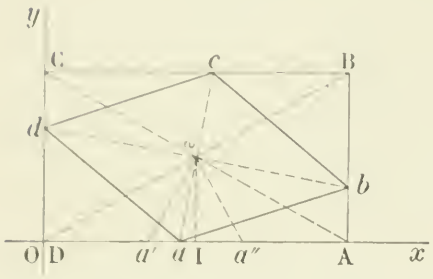
Ces diverses équations permettent de vérifier les résultats obtenus géométriquement dans l'épure.

N. C.

## COURS PRÉPARATOIRES A L'ÉCOLE DES PONTS ET CHAUSSÉES (Concours de 1894).

**376.** — *Dans un rectangle donné, on demande d'inscrire un losange de surface donnée ; déterminer la plus petite valeur que peut prendre cette surface pour que le problème soit possible.*

Prenons pour axes deux côtés consécutifs, DA et DC, du rectangle, et désignons par $2a$ et $2b$ les longueurs de ces côtés. Soient I le milieu du côté DA et $a$ le sommet du losange situé sur ce côté ; posons $Ia = \alpha$ ; alors l'abscisse du point $a$ sera $a + \alpha$ $(OI + Ia)$.




Cela posé, on inscrira un losange dans le rectangle en joignant le point $a$ au centre $\omega$ du rectangle et en élevant en ce point une perpendiculaire sur $a\omega$ ; cette perpendiculaire donnera les deux sommets $b$ et $d$. Le losange sera vraiment inscrit dans le rectangle si le point $d$ est compris entre O et C, c'est-à-dire si $0 < Od < 2b$.

Calculons alors $Od$. A cet effet, formons l'équation de $\omega d$ : en remarquant que le coefficient angulaire de $a\omega$ est $-\frac{b}{\alpha}$, on a de suite cette équation :

$$y - b = \frac{\alpha}{b}(x - a).$$

Faisons dans cette équation $x = 0$, nous aurons $Od$ : $Od = b - \frac{a\alpha}{b}$;
on doit donc avoir

$$0 < b - \frac{a\alpha}{b} < 2b,$$

ou

$$-\frac{b^2}{a} < \alpha < \frac{b^2}{a}.$$

En portant de part et d'autre du point I les longueurs $Ia' = Ia'' = \frac{b^2}{a}$, nous pouvons donc dire déjà que le point $a$ doit se trouver entre $a'$ et $a''$.

L'aire du losange $abcd$ est égale à $2|a\omega| \times |d\omega|$; en désignant cette aire par S, et se rappelant que les coordonnées des points $a, \omega, d$ sont : $a + \alpha$, $0$ ; $a, b$ ; $0$ et $b - \frac{a\alpha}{b}$, on obtient immédiatement les distances $a\omega$ et $d\omega$, et, par suite, l'équation qui donne $\alpha^2$ en fonction de S,

$$4(\alpha^2 + b^2)^2 = \frac{b^2S^2}{a^2}. \qquad (1)$$

Une seule valeur de $\alpha^2$ peut convenir, celle qui correspond à la racine arithmétique du second membre, et encore elle ne convient que si $\alpha^2$ est positif ; d'autre part, $\alpha^2$ doit être inférieur à $\frac{b^4}{a^2}$ ; on a donc successivement

$$2(\alpha^2 + b^2) = \frac{bS}{a},$$

$$\frac{bS}{a} > 2b^2, \qquad \text{puis} \qquad \frac{bS}{2a} - b^2 < \frac{b^4}{a^2};$$

on voit donc que S doit être compris entre $2ab$ et $2ab - 2ab \cdot \frac{b^2}{a^2}$.

Tous ces résultats se trouvent immédiatement par la géométrie la plus élémentaire.

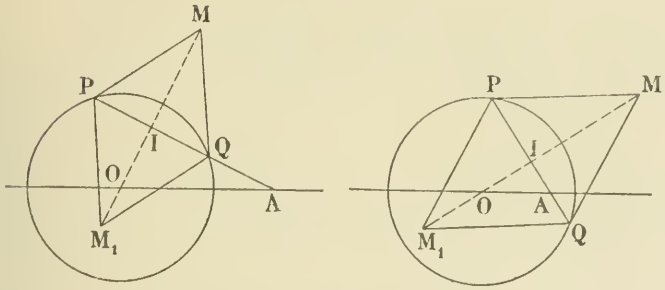
H. BONNARD, lycée de Bordeaux.

Ont résolu la même question : MM. E. N. Barisien ; Delmas, à Auteuil ; M. Garchery, lycée de Moulins ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.

**377.** — *Par un point fixe* A *pris dans le plan d'un cercle, on mène une corde* PQ *de direction variable sur laquelle on construit un triangle équilatéral* MPQ ; *on demande le lieu du point* M.

*Examiner le cas particulier où le point* A *est situé sur le cercle.*

Nous remarquerons qu'à toute sécante APQ correspondent deux triangles équilatéraux dont les sommets M et $M_1$ sont symétriques par rapport à PQ. Nous allons chercher l'équation du lieu de ces points en coordonnées polaires, en prenant le point O pour pôle et la droite OA pour axe polaire.




Soient R le rayon du cercle, $a$ la distance OA ; désignons par $\omega$ l'angle aigu AOI et par $\rho$ et $\rho_1$ les segments $\overline{OM}$ et $\overline{OM_1}$, le sens positif étant OI ; $\rho$ et $\omega$ seront les coordonnées polaires du point M, $\rho_1$ et $\omega$ celles du point $M_1$.

Nous allons étudier les variations de $\rho$ et de $\rho_1$ quand $\omega$ varie, et à cause de la symétrie de la figure par rapport à OA, on voit qu'il suffira de faire varier $\omega$ dans l'intervalle de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

On a
$$OI = a \cos \omega,$$
$$\overline{PI}^2 = R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - a^2 \cos^2 \omega,$$
et comme le triangle MPQ est équilatéral,
$$MP = 2PI,$$
$$\overline{MI}^2 = \overline{MP}^2 - \overline{PI}^2 = 3\overline{PI}^2 = 3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega).$$
On en déduit
$$\rho = a \cos \omega + \sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)},$$
$$\rho_1 = a \cos \omega - \sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)}.$$

On voit d'abord que $\rho$ et $\rho_1$ ne seront réels que si
$$R^2 - a^2 \cos^2 \omega > 0,$$
ou si
$$\cos \omega < \frac{R}{a}.$$

Cette condition est toujours remplie si $a < R$, c'est-à-dire si le point A est à l'intérieur du cercle ; dans ce cas, on fera varier $\omega$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$.

Au contraire si A est à l'extérieur du cercle, il existe un angle aigu $\alpha$ dont le cosinus est égal à $\frac{R}{a}$ ; on devra avoir
$$\omega > \alpha,$$
et $\omega$ ne pourra varier que de $\alpha$ à $\frac{\pi}{2}$.

On voit d'ailleurs aisément que l'angle $\alpha$ est égal à l'angle que fait avec OA la droite joignant le point O au point de contact de l'une des tangentes issues du point A au cercle.

Prenons maintenant les dérivées de $\rho$ et de $\rho_1$ par rapport à $\omega$ ; on a
$$\rho' = \frac{a \sin \omega}{\sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)}} \left[3a \cos \omega - \sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)}\right] = \frac{3a \sin \omega (4a^2 \cos^2 \omega - R^2)}{\sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)}\,[3a \cos \omega + \sqrt{3(R^2 - a^2 \cos^2 \omega)}]}.$$

Cette dérivée reste negative si $R > 2a$ ; dans le cas où $R < 2a$, il existe un angle aigu $\beta$ tel que
$$\cos \beta = \frac{R}{2a}.$$

Si $\omega < \beta$, $\cos\omega > \cos\beta$, la dérivée $\rho'$ est positive; si $\omega > \beta$, la dérivée est négative.

On a
$$\rho'_1 = \frac{-a\sin\omega}{\sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)}}\left(3a\cos\omega + \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)}\right),$$
cette dérivée est constamment négative quand $\omega$ est aigu.

Enfin, $\rho$ est toujours positif; quant à $\rho_1$, on peut l'écrire
$$\rho_1 = \frac{a^2\cos^2\omega - 3(R^2 - a^2\cos^2\omega)}{a\cos\omega + \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)}} = \frac{4a^2\cos^2\omega - 3R^2}{a\cos\omega + \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)}}.$$

Si $R\sqrt{3} > 2a$, $\rho_1$ est négatif; si, au contraire, $R\sqrt{3} < 2a$, il existe un angle aigu $\gamma$ tel que
$$\cos\gamma = \frac{R\sqrt{3}}{2a},$$
et $\rho_1$ s'annule pour $\omega = \gamma$. On voit de plus que $\rho_1$ est positif si $\omega < \gamma$, et négatif si $\omega > \gamma$.

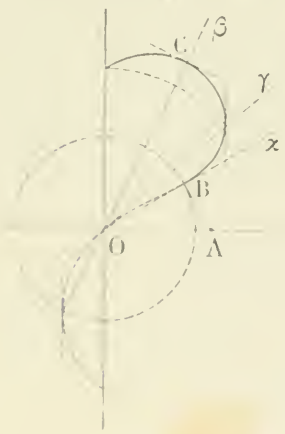
Nous obtenons donc trois valeurs remarquables pour $\cos\omega$, qui sont, rangées par ordre de grandeur décroissante,
$$\frac{R}{a}, \qquad \frac{R\sqrt{3}}{2a}, \qquad \frac{R}{2a},$$
et auxquelles correspondent les valeurs de $\omega$, rangées par ordre de grandeur croissante,
$$\alpha, \qquad \gamma, \qquad \beta.$$

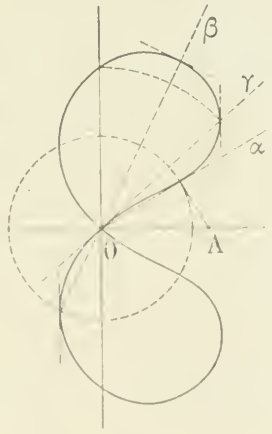
**Premier Cas.** $a > R$. — Les angles $\alpha$, $\gamma$, $\beta$ existent; on fera varier $\omega$ de $\alpha$ à $\frac{\pi}{2}$ et on obtiendra immédiatement le tableau de variation qui suit

| $\omega$ | $\alpha$ | | $\gamma$ | | $\beta$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho'$ | | + | | + | 0 | − | |
| $\rho$ | R | croît | $R\sqrt{3}$ | croît | 2R | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $-\rho'_1$ | | — | | — | | — | |
| $\rho_1$ | R | décroît | 0 | décroît | − R | décroît | $-R\sqrt{3}$ |

On en déduit la forme de la courbe; nous avons tracé en trait plein la portion de courbe qui correspond à la variation de $\rho$ et en trait discontinu celle qui correspond à la variation de $\rho_1$.

On a la tangente en un point quelconque en calculant

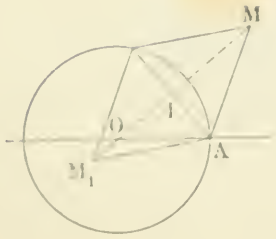



$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'}.$$

Au point $B(\omega = \alpha)$, $\rho'$ est infini, donc la tangente est le rayon vecteur OB; au point C, qui correspond au maximum de $\rho$, $\rho'$ est nul, donc la tangente est perpendiculaire à OC. En prenant le symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à OA, on obtient l'ensemble du lieu.

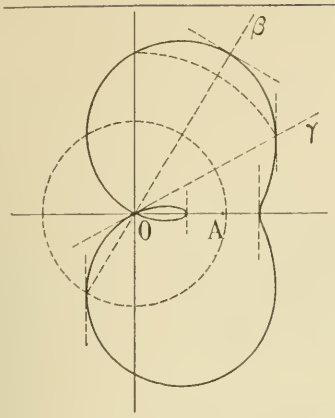
**Deuxième Cas.** $a = R$. Dans ce cas $\alpha$ est égal à zéro; on a
$$\rho = a(\cos\omega + \sqrt{3}\sin\omega),$$
$$\rho = a(\cos\omega - \sqrt{3}\sin\omega);$$




le lieu se compose de deux cercles, dont les équations rectilignes sont
$$x^2 + y^2 - ax - ay\sqrt{3} = 0,$$
$$x^2 + y^2 - ax + ay\sqrt{3} = 0.$$

Ce résultat peut d'ailleurs s'obtenir géométriquement.

En effet, l'angle OMA est égal à $\frac{\pi}{6}$, il en résulte que le lieu du




point M est le segment capable de cet angle construit sur OA : le lieu du point $M_1$ sera le segment symétrique par rapport à OA.

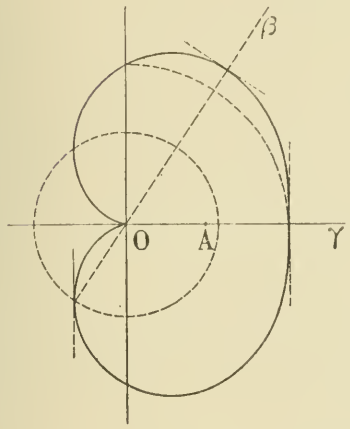
**Troisième Cas.** $R > a > \frac{R\sqrt{3}}{2}$. — L'angle $\alpha$ n'existe plus, on fera varier $\omega$ de 0 à $\frac{\pi}{2}$, en passant par les valeurs remarquables $\gamma$ et $\beta$.

Le tableau de la variation est le suivant :

| $\omega$ | 0 | | $\gamma$ | | $\beta$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $a+\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | croît | $R\sqrt{3}$ | croît | $2R$ | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $\rho_1$ | $a-\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | décroît | 0 | décroît | $-R$ | décroît | $-R\sqrt{3}$ |

ce qui permet de construire la courbe.

Les tangentes aux points de rencontre de la courbe et de OA sont perpendiculaires à OA, car $\rho'$ et $\rho'_1$ s'annulent pour $\omega = 0$.

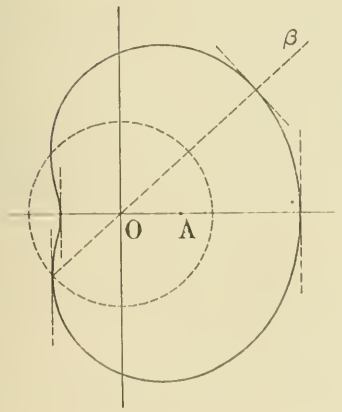



**Quatrième Cas.** $a = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. — Dans ce cas $\gamma = 0$.

| $\omega$ | 0 | | $\beta$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $R\sqrt{3}$ | croît | $2R$ | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $\rho_1$ | 0 | décroît | $-R$ | décroît | $-R\sqrt{3}$ |

**Cinquième Cas.** $\frac{R\sqrt{3}}{2} > a > \frac{R}{2}$. — L'angle $\gamma$ n'existe plus.

| $\omega$ | 0 | | $\beta$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | $a+\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | croît | $2R$ | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $\rho_1$ | $a-\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | décroît | $-R$ | décroît | $-R\sqrt{3}$ |

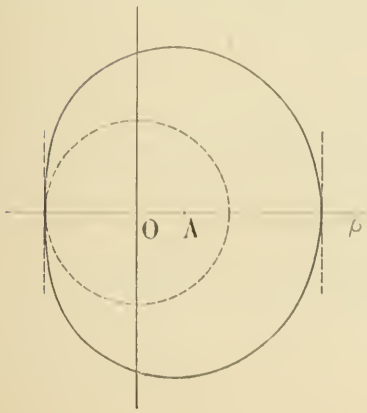



**Sixième Cas.** $a = \frac{R}{2}$. — On a $\beta = 0$.

| $\omega$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | $2R$ | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $\rho_1$ | $-R$ | décroît | $-R\sqrt{3}$ |

**Septième Cas.** $a < \frac{R}{2}$.

| $\omega$ | 0 | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $\rho$ | $a+\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | décroît | $R\sqrt{3}$ |
| $\rho_1$ | $a-\sqrt{3(R^2-a^2)}$ | décroît | $-R\sqrt{3}$ |




forme de courbe analogue à la précédente.

**Huitième Cas.** $a = 0$. — Le lieu se compose d'un cercle $\rho = R\sqrt{3}$.

**Remarque.** — De l'équation du lieu en coordonnées polaires,

$$\rho = a\cos\omega \pm \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)},$$

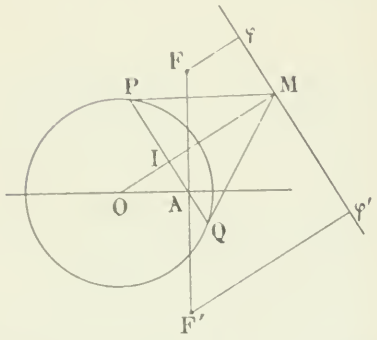
on déduit immédiatement son équation en coordonnées rectilignes,

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = 3R^2(x^2 + y^2) - 3a^2x^2$$

ou

$$(x^2 + y^2)^2 - 2ax(x^2 + y^2) + (4a^2 - 3R^2)x^2 - 3R^2y^2 = 0.$$

Sur cette équation on voit immédiatement que le lieu est une podaire de conique. Mais il nous paraît bon de montrer directement cette propriété du lieu.




A cet effet, menons au point M une perpendiculaire à OM ; il est facile de voir que cette droite enveloppe une conique. En effet son équation est

$$(x - a)\cos\omega + y\sin\omega - \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)} = 0;$$

les distances de deux points F et F', d'abscisse $a$ et d'ordonnées $y' = y$, à cette droite sont donc

$$y\sin\omega - \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)} \quad \text{et} \quad -y\sin\omega - \sqrt{3(R^2 - a^2\cos^2\omega)},$$

et le produit de ces distances est

$$F\varphi . F\varphi' = 3R^2 - 3a^2\cos^2\omega - y^2\sin^2\omega;$$

ce produit est indépendant de $\omega$ pour une valeur de $y$, $y = a\sqrt{3}$; donc en prenant $AF' = -AF = a\sqrt{3}$, on a toujours

$$F\varphi . F'\varphi' = C^{te} = 3(R^2 - a^2);$$

par conséquent la droite $M\varphi$ enveloppe une conique dont F et F' sont les deux foyers.

Si $R^2 > a^2$, c'est-à-dire si le point A est à l'intérieur du cercle donné, cette conique est une ellipse.

Si $R^2 < a^2$, la conique est une hyperbole.

Enfin pour $R^2 = a^2$, on a $F\varphi . F'\varphi' = 0$, et les perpendiculaires à OM, élevées en M et en $M_1$, passent par deux points fixes, F et F'; le lieu se décompose en deux cercles, ayant respectivement pour diamètres OF et OF'. C'est le cas qu'il fallait examiner à part.

Le point O, pôle de la podaire de la conique dont on vient de parler, est sur l'axe non focal de la conique. Dans le cas où la conique est une ellipse, les tangentes en ce point, qui est un point double du lieu, peuvent être imaginaires : cela arrive si le point O est à l'intérieur de l'ellipse, c'est-à-dire si $a^2 < 3R^2 - 3a^2$, ou $a^2 < \frac{3R^2}{4}$.

Si $a^2 = \frac{3R^2}{4}$, le point O est sommet de cette ellipse et la podaire a un point de rebroussement en ce point. Pour toute autre valeur de $a$, le point double est un point double ordinaire.

Cette question a été résolue par MM. E.-N. Barisien ; Henri Bonnard, surveillant général au lycée de Bordeaux ; Dumas, à Autun ; Louis Espinat, instituteur à Espinchal ; Paul Ozenne, faculté des sciences de Toulouse ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette ; Forché, répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan ; G. A. Pouillart, à Joigny ; M. Serran, à Bourg-la-Reine.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**387.** — Lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a une longueur constante et parcourt une droite donnée, tandis que l'un des côtés de l'angle droit tourne autour d'un point fixe.

**388.** — On donne une parabole et un cercle ayant son centre sur l'axe. Trouver le lieu du point de rencontre des normales à la parabole aux points où elle est coupée par une tangente au cercle.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. LOMTE JACQUET.

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

(Librairie NONY et Cie, Rue des Écoles, 17, a Paris.)

Les dimensions actuelles de la *Revue de Mathématiques spéciales* sont un obstacle absolu à la réalisation du programme que nous nous sommes imposé, et dont nous avons marqué les traits essentiels dans le numéro de septembre. Aussi avons-nous fait appel à la générosité de nos éditeurs pour obtenir d'eux des sacrifices nouveaux qui permettent de donner à la Revue son véritable caractère. Notre appel a été entendu, et nous avons aujourd'hui le plaisir d'annoncer à nos lecteurs la transformation prochaine de notre journal.

La Revue nouvelle paraîtra, comme l'ancienne, le premier de chaque mois, et comprendra vingt-quatre pages in-quarto, sur lesquelles les neuf ou dix premières seront toujours consacrées à des articles variés dont nous allons énumérer les titres divers. Ce seront d'abord des notes relatives aux questions qui composent les programmes des classes de mathématiques spéciales : notes, leçons, méthodes nouvelles, aperçus nouveaux, en un mot, tout ce qui peut améliorer, simplifier ou préciser cette branche importante de l'enseignement secondaire. Ce seront des aperçus historiques sur les diverses parties de ces cours, donnant rapidement l'histoire de telle ou telle question, et rappelant, à cette occasion, des méthodes aujourd'hui oubliées, parfois plus simples, plus naturelles, plus fécondes, au point de vue des applications, que celles qui leur

ont été substituées. Ce seront des articles pédagogiques, tendant, soit à d'heureuses modifications des programmes, soit à préconiser l'emploi de nouveaux systèmes d'enseignement, non encore appliqués, et qui seront ainsi livrés à la critique de tous. Ce seront aussi, de la part des esprits distingués qui voudront bien nous aider de leur amicale collaboration, des critiques sérieuses sur les diverses façons de faire acquérir aux élèves, dans nos lycées, les connaissances réellement utiles au développement de l'esprit et aux buts pratiques de leurs vies ; de rapides notices bibliographiques, etc., etc.

Ce qui restera, dans chaque numéro, quatorze ou quinze pages environ, sera, comme actuellement, divisé en deux parties d'égales dimensions et consacrées aux solutions de problèmes variés, destinés à montrer aux élèves des diverses classes de mathématiques spéciales comment on descend de la théorie aux applications et comment on expose une question. La première partie sera plus particulièrement rédigée pour les candidats aux Écoles Normale et Polytechnique et pour les candidats à l'agrégation ; la seconde, pour les candidats aux Écoles Centrale, des Mines, des Ponts et Chaussées, Navale et des Mines de Saint-Etienne. Chacune de ces deux parties contiendra des énoncés appropriés, et, aux époques convenables, les énoncés des questions proposées aux divers concours que nous venons de rappeler. Toutes les rédactions seront faites avec le plus grand soin, et mises à la portée des lecteurs supposés. Ces deux parties du journal ne peuvent que gagner à la transformation annoncée, sûres qu'elles seront, à l'avenir, de posséder, dans chaque numéro, une étendue convenable.

La physique ne sera plus négligée, comme elle l'a été jusqu'à ce jour, faute de place, et tiendra dans nos préoccupations une place conforme à la haute portée de ses mé-

thodes et à l'importance qu'elle prend de plus en plus dans l'Enseignement secondaire.

En résumé, nous voulons que la *Revue de Mathématiques spéciales* devienne un véritable journal d'enseignement secondaire, élevé, complet et s'intéressant à tout ce qui concerne particulièrement la préparation aux examens difficiles, placés aujourd'hui comme des barrières malaisées à franchir à l'entrée de toutes les carrières civiles et militaires. Nous irons parfois jusqu'à y publier des leçons sur cette partie du programme d'agrégation qui se rattache à l'enseignement secondaire. Mais nous éviterons soigneusement de publier des rédactions trop abstraites et trop difficiles à lire pour les élèves ; nous n'accepterons donc que les rédactions simples, claires, et ne laissant dans l'ombre aucune difficulté véritable.

Nous craindrions d'être trop téméraires en assumant cette lourde tâche, si nous ne comptions sur le concours bienveillant des maîtres de l'enseignement supérieur et de l'enseignement secondaire, qui deviendront, nous en avons le ferme espoir, des collaborateurs occasionnels de la *Revue*, compétents et autorisés. Nous ne leur demandons d'ailleurs ainsi aucun travail prémédité, ni d'adjoindre un souci nouveau à ceux que leur créent leurs absorbantes fonctions. Nous les prions seulement, quand ils auront quelque chose à dire qui rentre dans notre programme, et qu'ils désirent publier, de s'adresser à nous et de nous demander une hospitalité que nous serons heureux de leur offrir. La seule restriction que nous sommes obligés d'imposer à leur collaboration, vise les articles scientifiques trop élevés pour nous ou d'une rédaction trop condensée pour que nos lecteurs puissent en tirer profit, sans une peine trop grande. Ils ont l'esprit trop large pour ne pas comprendre cette obligation, et pour que cette restriction nous aliène leurs sympathies.

Notre but n'est pas de faire concurrence à aucun des organes scientifiques actuellement existants ; nous poursuivons un idéal différent du leur. Aussi quand nous ne pourrons insérer un article, nous le retournerons à son auteur, en lui indiquant le journal qui, à notre avis, nous semble le mieux fait pour le publier. Nous demandons, en terminant, aux rédacteurs des autres journaux de Mathématiques de nous traiter avec le même esprit de fraternité.

E. HUMBERT,

Janvier 1895. 85, rue d'Assas.

Afin d'avoir le temps d'amasser les matériaux nécessaires à une publication ininterrompue de la nouvelle *Revue de Mathématiques spéciales*, la transformation indiquée n'aura lieu qu'a partir du numéro destiné à paraître le 1er Juin.

Bar-le-Duc. — Imprimerie Comte-Jacquet.

5e Année. N° 5 Février 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### CORRESPONDANCE

Mon cher Directeur,

J'ai eu plusieurs fois l'occasion d'insister sur la nécessité qu'il y a, en Géométrie analytique, à adopter une convention relative aux signes des aires, tout comme on en adopte une sur les signes des segments. J'ai fait remarquer, en même temps, que la méconnaissance de ce principe des signes appliqués aux aires conduit à donner pour l'expression de l'aire d'un triangle, une démonstration qui n'est pas sans inconvénients.

D'une part, en effet, on complique comme à plaisir la question, qui est essentiellement du premier degré, par l'introduction d'une distance (la hauteur du triangle) exprimée par un radical du second degré destiné à disparaître dans le résultat. En second lieu, et ceci est plus grave, ce radical laisse derrière lui, même quand il a disparu, un double signe qui est une source de confusions et d'erreurs. Neuf élèves sur dix, même parmi les meilleurs, se trouvent fort embarrassés dès qu'on sollicite d'eux quelque éclaircissement sur ce point, et arrivent en fin de compte à dire qu'on choisit le signe + ou le signe — dans chaque cas particulier d'une façon convenable, *une aire devant être essentiellement positive.*

Cette affirmation est une véritable hérésie au point de vue de la géométrie moderne. Autant vaudrait dire qu'un segment est essentiellement positif. Si je ne suis pas parvenu à modifier les habitudes prises, cela tient en partie, je le crois du moins, à ce que je n'ai pas présenté la démonstration nouvelle que je proposais sous une forme suffisamment simple. Permettez-moi donc de revenir sur ce sujet dans votre excellente *Revue*, en vous envoyant une note qui me paraît offrir le maximum de clarté et de simplicité désirables.

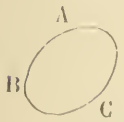
Veuillez agréer, etc.

C.-A. LAISANT.

### NOTE sur le principe des signes appliqués aux aires. Aire d'un triangle ou d'un polygone en fonction des coordonnées des sommets,

par M. C.-A. LAISANT, docteur ès sciences.

1° *Signes des aires.* — Quand on considère une aire plane fermée, dont le contour est ABCA par exemple, il importe d'affecter le nombre qui représente cette aire du signe + ou du signe — suivant que le contour est considéré comme parcouru dans le sens ABC, ou dans le sens opposé ACB. Le sens considéré comme positif, ou direct, importe peu ; cependant, on prend généralement pour sens positif celui dans lequel un observateur suivant le contour aurait constamment l'aire intérieure à sa gauche, ABC sur la figure. C'est le sens d'une circulation, ou d'une rotation, contraire à celle des aiguilles d'une montre, ou pareille à celle des mouvements astronomiques réels.




On remarquera que cette notion du signe dans les aires n'a rien de nouveau, et qu'elle est au contraire adoptée, sans qu'on le dise, dans l'enseignement le plus élémentaire. En Trigonométrie, par exemple, on ne saurait avancer d'un pas sans la convention sur les signes des angles ou des arcs ; or, les nombres qui mesurent les angles ou les arcs n'étant autres que ceux qui mesurent les doubles secteurs circulaires correspondants, dans un cercle de rayon un, on voit bien que la convention dont nous parlons est implicitement admise. En coordonnées polaires, il en est de même. Et c'est justement pour être d'accord avec les conventions adoptées en trigonométrie et dans l'emploi des coordonnées polaires, que nous avons choisi le sens positif des aires comme nous l'avons dit plus haut.

2° *Théorème général sur l'aire d'un polygone.* — Cette convention admise, il s'ensuit que l'aire d'un polygone fermé

ABC...L étant représentée par (ABC...L) on aura (ABC...L) = (BC...LA) = ··· = — (L...CBA) = ··· = — (AL...CB). En particulier, pour un triangle : (ABC) = (BCA) = (CAB) = — (CBA) = — (BAC) = — (ACB).

Or, un triangle ABC étant donné, si l'on prend un point S à l'intérieur, on a

$$(ABC) = (SAB) + (SBC) + (SCA);$$

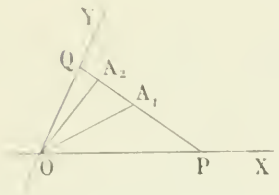
et si l'on remarque que le point S venant à franchir l'un des côtés, l'une des trois aires du second membre change de signe, on n'a pas de peine à constater que cette relation est générale, pour toute position du point S sur le plan.

On voit de même, plus généralement encore, que *l'aire d'un polygone plan quelconque* ABC...L, *prise dans le sens indiqué par les lettres, a toujours pour expression*

$$(SAB) + (SBC) + \cdots + (SLA),$$

S *étant un point arbitraire du plan.*

3° *Aire d'un triangle.* — Soient $(a_1, b_1)$, $(a_2, b_2)$ les coordonnées de deux points $A_1$, $A_2$ rapportés aux axes OX, OY ; considérons l'aire du triangle $OA_1A_2$. En prolongeant la droite $A_1A_2$ jusqu'à la rencontre des axes, en P, Q, il est bien évident qu'on a toujours, en grandeur et en signe,




$$\frac{(OA_1A_2)}{(OPQ)} = \frac{A_1A_2}{PQ}.$$

Posons $OP = \alpha$, $OQ = \beta$ ; alors $(OPQ) = \frac{1}{2}\alpha\beta \sin\theta$, et $\frac{A_1A_2}{PQ} = \frac{a_1 - a_2}{\alpha}$. Donc

$$(OA_1A_2) = \frac{1}{2}\sin\theta . \beta(a_1 - a_2).$$

Mais on a
$$\frac{a_1}{\alpha} + \frac{b_1}{\beta} = 1, \qquad \frac{a_2}{\alpha} + \frac{b_2}{\beta} = 1,$$

d'où
$$\beta(a_1 - a_2) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Par conséquent,
$$(OA_1A_2) = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Si on considère un triangle $A_3A_1A_2$ dont le sommet $A_3$ aurait pour coordonnées $a_3$, $b_3$, le résultat précédent donne immédiatement

$$(A_3A_1A_2) = (A_1A_2A_3) = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} a_1 - a_3 & b_1 - b_3 \\ a_2 - a_3 & b_2 - b_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sin\theta \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 \\ a_3 & b_3 & 1 \end{vmatrix},$$

formule identique avec celle qui est donnée en général, à cette seule différence près, qu'elle ne présente pas de double signe, et qu'elle est toujours exacte, en signe aussi bien qu'en grandeur.

On y arriverait aussi en écrivant

$$(A_1A_2A_3) = (OA_1A_2) - (OA_2A_3) + (OA_3A_1) = \frac{1}{2}\sin\theta \left[ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right].$$

4° *Aire d'un polygone.* — Pour un polygone $A_1A_2\ldots A_n$, les coordonnées de $A_k$ étant $a_k$, $b_k$, on aurait de la même manière

$$(A_1A_2\ldots A_n) = \frac{1}{2}\sin\theta \left[ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + \cdots + \begin{vmatrix} a_n & b_n \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \right].$$

# SUR UN THÉORÈME D'ALGÈBRE

par M. X. ANTOMARI.

**Théorème.** — *Soit*

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots \qquad (1)$$

*une série à termes positifs convergente et ayant pour somme* S. *Soit, d'autre part,*

$$\sigma = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$$

*la somme de n nombres positifs tels, qu'à partir d'un certain rang, chacun d'eux soit une fonction de n croissante en même temps que n et inférieure au terme correspondant de* (1).

*Si, quand n croît indéfiniment, chaque terme de* $\sigma$ *a pour limite le terme correspondant de la série* (1), *la somme* $\sigma$ *à une limite égale à* S.

Soit $p$ un nombre entier et positif. Si l'on désigne par $S_p$ la somme des $p$ premiers termes de la série (1) et par $R_p$ la somme de ceux qui suivent, on peut poser

$$S = S_p + R_p,$$

et, puisque la série (1) est convergente, on peut calculer $p$ de telle sorte que l'on ait

$$R_p < \frac{\varepsilon}{3},$$

$\varepsilon$ étant un nombre positif donné.

Prenons $n > p$, et posons aussi

$$\sigma = \sigma_p + \rho_p,$$

en désignant par $\sigma_p$ la somme des $p$ premiers termes de $\sigma$ et par $\rho_p$ la somme de ceux qui suivent.

On en déduit

$$S - \sigma = S_p - \sigma_p + R_p - \rho_p; \qquad (2)$$

mais, sans restreindre le raisonnement, on peut supposer que les termes de $\sigma$ soient inférieurs aux termes correspondants de la série (1) à partir du terme $v_p$. On aura alors $\rho_p < R_p$ et, par suite,

$$R_p - \rho_p < \frac{2\varepsilon}{3}$$

puisque $R_p$ est inférieur à $\frac{\varepsilon}{3}$.

Supposons alors que, $p$ restant fixe, $n$ croisse indéfiniment; chaque terme de $\sigma_p$ ayant pour limite le terme correspondant de $S_p$, et $p$ restant fixe, on a

$$\lim \sigma_p = S_p.$$

On peut donc trouver un nombre N, parmi les nombres supérieurs à $p$, tel que l'inégalité $n > N$ entraîne l'inégalité

$$\left| S_p - \sigma_p \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Donc en prenant $n > N$, on aura toujours

$$\left| S - \sigma \right| < \varepsilon,$$

ce qui montre, en vertu de la définition de la limite, que $\sigma$ a une limite égale à S.

**Application.** — Considérons l'expression $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ et supposons $x$ positif et $m$ entier et positif. Si l'on compare chaque terme du développement de $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ au terme correspondant de la série

$$f(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^m}{m!} + \cdots$$

on constate que l'on se trouve exactement dans les conditions du théorème démontré plus haut. On a donc

$$\operatorname{Lim} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = f(x),$$

quand $x$ est positif et que $m$ croît indéfiniment par valeurs entières et positives.

Le cas où $x$ est négatif se ramène au même théorème; mais nous laissons au lecteur le soin de le démontrer.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

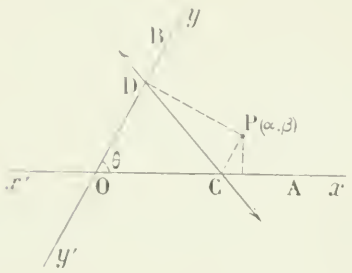
**372.** — *Étant données deux droites* OA, OB *et un point* P ; *autour de ce point on fait tourner un angle droit dont les côtés rencontrent* OA *et* OB *en* C *et* D.

*1° Trouver l'enveloppe de la droite* CD.

*2° Cette enveloppe est une conique* S. *Trouver le lieu des points* P *pour lesquels la conique* S *est une hyperbole équilatère.*

*3° Trouver l'enveloppe de la polaire du point* O *par rapport à la conique* S *quand le point* P *décrit une droite donnée,* Δ.

1° Prenons pour axes de coordonnées les deux droites données OA et OB, et désignons par $\theta$ l'angle des directions positives $Ox$ et $Oy$ choisies sur ces droites, par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point P. On peut toujours faire en sorte que $\theta$ soit aigu ; nous supposerons que cela soit.




Représentons alors par $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite CD, et formons l'équation aux coefficients angulaires des droites qui joignent le point P aux deux points C et D. Pour cela portons les axes parallèlement à eux-mêmes au point P ; l'équation quadratique des axes devient

$$(x + \alpha)(y + \beta) = 0,$$

et l'équation de la droite CD,

$$ux + vy + P = 0,$$

en posant $P = u\alpha + v\beta + w$. Il n'y a plus alors qu'à former une combinaison homogène de ces deux équations pour obtenir l'équation quadratique des rayons PC et PD ; cette combinaison est

$$P^2xy - P(\beta x + \alpha y)(ux + vy) + \alpha\beta(ux + vy)^2 = 0.$$

En exprimant que ces deux droites sont rectangulaires par la condition qui s'écrit habituellement

$$A + C - 2B\cos\theta = 0,$$

on obtient

$$\alpha\beta(u^2 + v^2 - 2uv\cos\theta) - (\alpha u + \beta v + w)(\beta u + \alpha v + w\cos\theta) = 0. \qquad (1)$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe cherchée. Cette équation représente une conique ayant pour foyers les deux points

$$\alpha u + \beta v + w = 0, \qquad \beta u + \alpha v + w\cos\theta = 0\,;$$

le premier de ces points est le point donné P ; le second est sur un rayon issu du point O et symétrique de OP par rapport à la bissectrice de l'angle $xOy$ ; cette conique est d'ailleurs tangente aux deux axes, ainsi qu'il est facile de le vérifier.

2° Cherchons le centre et les tangentes issues de ce point ; ce seront les asymptotes, et en exprimant qu'elles sont rectangulaires la question proposée sera résolue.

Or le centre a pour équation $\dfrac{df}{dw} = 0$, ou

$$(\alpha\cos\theta + \beta)u + (\beta\cos\theta + \alpha)v + 2w\cos\theta = 0\,;$$

en joignant cette équation à l'équation (1) on aura les deux asymptotes. Il suffit d'éliminer $w$ entre ces

deux équations pour avoir les coefficients angulaires ; on obtient ainsi

$$4\alpha\beta\cos\theta(u^2+v^2-2uv\cos\theta)+(\alpha\cos\theta-\beta)u+(\beta\cos\theta-\alpha)v^2=0.$$

Les coefficients angulaires sont les valeurs de $\frac{-u}{v}$ ; par conséquent la condition d'orthogonalité est ici, A, C, 2B désignant respectivement les coefficients de $u^2$, $v^2$, $uv$,

$$A+C+2B\cos\theta=0,$$

ou

$$(\alpha\cos\theta-\beta)^2+(\beta\cos\theta-\alpha)^2+8\alpha\beta\cos\theta+2\cos\theta(\alpha\cos\theta-\beta)(\beta\cos\theta-\alpha)-4\alpha\beta\cos^2\theta=0,$$

ou

$$\alpha^2+\beta^2+6\alpha\beta\cos\theta=0.$$

Cette équation représente le lieu demandé ; on voit de suite qu'il se compose de deux droites passant à l'origine.

Remarquons en passant que si l'on se reporte à l'équation du second degré qui donne $\frac{u}{v}$, on exprimera que la conique S est une ellipse ou une hyperbole en exprimant que le discriminant est positif ou négatif. Or ce discriminant est

$$4\alpha\beta\cos\theta\sin^2\theta(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos\theta);$$

il est donc positif ou négatif en même temps que $\alpha\beta$ ; par conséquent si le point P est dans l'un des deux angles aigus formés par les droites données, la conique S est une ellipse ; sinon c'est une hyperbole ; si le point P est sur l'un des axes, la conique se réduit à deux points.

3° Si l'on exprime que le pôle de la droite $u, v, w$ par rapport à la conique S est le point O, on obtient les deux équations suivantes entre $u, v, w$ :

$$\frac{df}{du}=0,\qquad \frac{df}{dv}=0,$$

ou

$$2\alpha\beta(u-v\cos\theta)-\alpha(\beta u+\alpha v+w\cos\theta)-\beta(\alpha u+\beta v+w)=0,$$

$$2\alpha\beta(v-u\cos\theta)-\beta(\beta u+\alpha v+w\cos\theta)-\alpha(\alpha u+\beta v+w)=0.$$

Il faut y joindre l'équation

$$a\alpha+b\beta+c=0,$$

qui exprime que le point P parcourt une droite donnée, et éliminer $\alpha, \beta$ entre ces trois équations. Or les deux premières peuvent s'écrire

$$2\alpha\beta v\cos\theta+(\alpha^2+\beta^2)v+w(\alpha\cos\theta+\beta)=0,$$

$$2\alpha\beta u\cos\theta+(\alpha^2+\beta^2)u+w(\beta\cos\theta+\alpha)=0;$$

en multipliant la première par $u$, la seconde par $v$, et retranchant, on obtient

$$u(\alpha\cos\theta+\beta)-v(\beta\cos\theta+\alpha)=0,$$

ou

$$\frac{\alpha}{u-v\cos\theta}=\frac{\beta}{v-u\cos\theta};$$

tenant compte de la relation $a\alpha+b\beta+c=0$, on a de suite

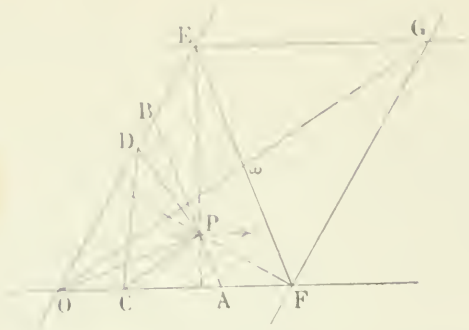
$$\frac{\alpha}{u-v\cos\theta}=\frac{\beta}{v-u\cos\theta}=\frac{-c}{au+bv-\cos\theta(av+bu)}.$$

Il n'y a plus qu'à porter ces valeurs dans l'une des équations du second degré en $\alpha, \beta$, par exemple dans la première, pour obtenir l'enveloppe cherchée ; on obtient ainsi

$$2c\cos\theta(u-v\cos\theta)(v-u\cos\theta)+c^2(u-v\cos\theta)^2+(v-u\cos\theta)^2-w\sin^2\theta(au+bv-\cos\theta(av+bu))=0. \quad (3)$$

C'est l'équation tangentielle d'une parabole.

**Solution géométrique.** — 1° Les deux rayons PC et PD faisant entre eux un angle constant décrivent deux faisceaux homographiques; donc les séries C et D tracées sur OA et sur OB sont homographiques; par suite, la droite CD, qui joint deux points correspondants, enveloppe une conique tangente aux droites OA et OB.



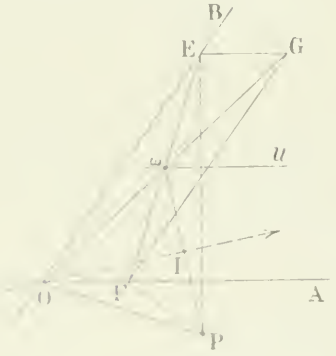

On aura les points de contact de ces droites avec la conique en cherchant ce que deviennent les points C et D quand la droite mobile se couche sur OA ou sur OB, c'est-à-dire en élevant au point P une perpendiculaire à OP; la droite AB ainsi obtenue est donc la polaire du point O.

Les tangentes à cette conique issues du point P sont les rayons doubles des faisceaux PC et PD; ce sont donc les droites isotropes, et le point P est l'un des foyers.

On aura le centre de cette conique en cherchant les tangentes parallèles à OA et à OB, c'est-à-dire en menant par le point P les angles droits ayant un côté parallèle à OA ou à OB et prenant à chaque fois l'intersection de l'autre côté avec la seconde droite OB ou OA. On obtient ainsi EG et FG, et la conique S est inscrite dans le parallélogramme OFGE; son centre ω est donc le centre de cette figure. L'axe focal est la droite ωP. D'ailleurs le point O appartient à la directrice, puisque la polaire de ce point passe au foyer; la directrice est donc la perpendiculaire abaissée du point O sur Pω.

Cette conique est une ellipse si le point P est compris entre deux tangentes parallèles, une hyperbole dans le cas contraire; donc si le point P est dans l'un des angles aigus formés par les deux droites, la conique est une ellipse; sinon, c'est une hyperbole. Cette conique se réduit à deux points quand le point P est sur l'une des droites OA ou OB.

2° Soit OI la perpendiculaire abaissée du point O sur la droite Pω. Cette droite est la directrice relative au foyer P. Pour que la conique S soit une hyperbole équilatère, il faut et il suffit que la directrice tombe au milieu de Pω, c'est-à-dire que $OP = O\omega$.




Mais si cette relation a lieu pour une position du point P, elle aura lieu pour toutes les positions de ce point sur le rayon OP, car lorsque P parcourt un rayon passant au point O, la figure précédente se déforme homothétiquement par rapport au centre O, et OP reste égal à Oω, si cela a lieu une fois. Donc le lieu se compose de droites passant au point O.

Pour avoir le nombre de ces droites, il suffit de chercher combien il y a de points P sur une perpendiculaire PE à OA. Or quand le point P se meut sur PE, le côté FG du parallélogramme OFGE se déplace parallèlement à OE, les autres restent fixes. Les deux points P et F décrivent alors deux séries semblables sur les droites PE et OA; les deux points F et G décrivent deux séries égales sur OA et sur EG, et les points ω et G, deux séries semblables sur une droite $u$ parallèle à OA, équidistante de OA et de EG, et sur EG. Donc les deux points ω et P décrivent deux séries semblables sur $u$ et sur EP, et la droite ωP enveloppe une parabole tangente à $u$ et à EP. Le milieu I de ωP décrit donc une droite Δ tangente à cette parabole, et qui est la perpendiculaire élevée au milieu de la droite qui joint le foyer de la parabole au point de concours de $u$ et de EP. Soit K le point à l'infini de ωP. Les deux points I et K tracent deux divisions homographiques sur la droite Δ et la droite de l'infini, puisque ce sont deux tangentes à la parabole et que IK est une tangente mobile à cette courbe. Enfin en appelant K′ le point où la normale à Pω rencontre la droite de l'infini, on sait que les deux points K et K′ divisent harmoniquement les points circulaires; ils décrivent donc deux séries homographiques. Donc la perpendiculaire élevée sur Pω en son milieu I enveloppe une autre parabole. En menant du point O deux tangentes à cette parabole, on aura deux positions pour OI; il y a donc deux points P qui répondent à la question, et le lieu demandé se compose de deux droites qui passent au point O.

3° Quand le point P décrit une droite quelconque Δ′, la polaire du point O par rapport à S, AB, reste

toujours perpendiculaire à OP. Donc elle enveloppe une parabole dont le foyer est le point O et la tangente au sommet, Δ'.

Solutions justes : MM. V. Bertrand (Douai) ; Bailly (Dijon) ; G. Martinet (Toulouse) ; P. Hostalot, H. Marette (lycée Condorcet). Nous avons reçu d'autres solutions incomplètes, dont nous ne faisons pas mention.

## PHYSIQUE

**275.** — *Une sphère de verre, de rayon a, est percée d'une cavité sphérique, concentrique, de rayon b, remplie de mercure. Un point lumineux est placé extérieurement à une distance D du centre. On demande :*

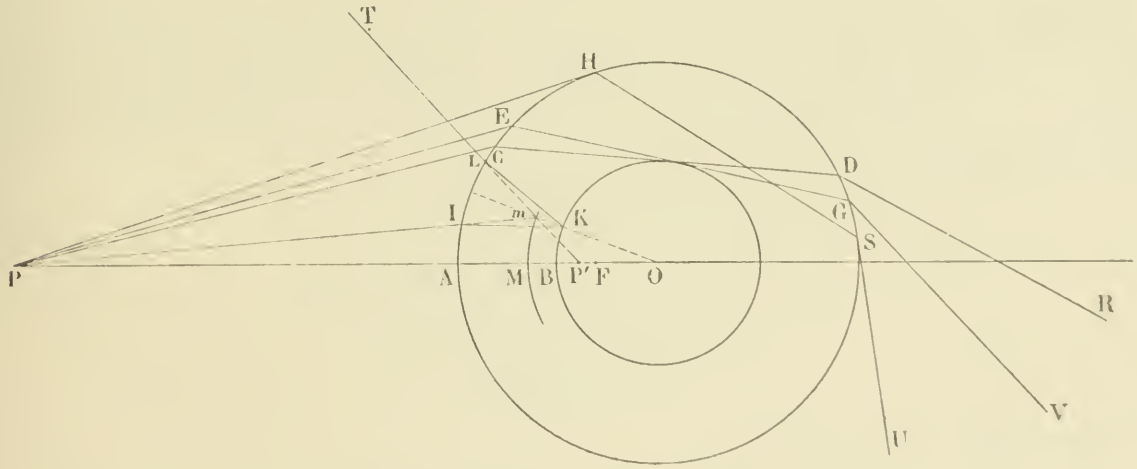
*1° D'étudier la marche des rayons centraux ;*

*2° De distinguer les différentes régions que les rayons marginaux éclairent, soit par transmission, soit par réflexion sur le mercure.*

*On examinera l'influence de la dispersion.*

(*École normale supérieure. 1893.*)

1° Soit PIKLT un rayon central. Les directions du rayon incident et du rayon émergent sont également inclinées sur la droite OK et se coupent en un point $m$ de cette droite qui est le conjugué de K par réfraction dans la surface AIL. Donc la distance $Om$ est constante et les rayons émergents se




comportent comme s'ils s'étaient réfléchis sur un miroir convexe $m$M dont le sommet M est conjugué du point B par réfraction dans la surface de la sphère de verre ; cette conclusion est, d'ailleurs, une conséquence de la théorie générale des systèmes catadioptriques. On en déduit, en appelant $n$ l'indice du verre,

$$OM = \frac{nab}{a + (n-1)b}.$$

Le point M est toujours situé entre A et B ; le foyer F est entre B et O si $n$ est plus petit que 2, ce qui a lieu pour le verre.

2° Faisons maintenant tourner le rayon PI autour du point P en l'écartant progressivement de l'axe ; le rayon LT tourne en sens contraire et l'angle P$m$T augmente. Les rayons qui se réfléchissent

ainsi sur le mercure ont pour limite le rayon PCDR, tangent à la sphère intérieure ; l'angle d'incidence correspondant sur la sphère de verre est donné par la relation

$$\sin k = n\frac{b}{a},$$

ce qui exige

$$\frac{a}{b} > n.$$

Un calcul facile montre que la dérivée de l'angle P$m$T par rapport à l'angle API devient infinie pour cette position limite ; il en résulte que l'éclairement produit par les rayons réfléchis est nul dans la direction DR.

L'incidence continuant de croître, le rayon transmis, qui ne rencontre plus le mercure, continue de tourner dans le même sens et tend vers la position limite SU correspondant à un rayon incident PH, tangent à la sphère de verre.

L'éclairement produit par les rayons transmis est fini dans la direction DR ; il s'annule dans la direction SU, tant à cause de la vitesse de rotation du rayon émergent, que par suite de l'accroissement des pouvoirs réflecteurs aux points d'incidence et d'émergence.

3° L'angle $k$ croît avec l'indice ; il est plus grand pour les couleurs plus réfrangibles, et si PCDR représente le rayon limite pour le rouge, le rayon violet aura une direction telle que PEGV. Il en résultera donc, sur un écran placé à une distance assez grande, un halo circulaire bordé de rouge à l'intérieur.

Si, pour une position déterminée du point P, le rayon de la sphère intérieure augmente, les directions DR et GV se rapprochent de la direction SU ; le halo grandit, devient moins lumineux, et disparaît quand $\frac{a}{b} = n$.

Si, pour une valeur déterminée de $b$, le point P s'éloigne ou s'approche, les trois directions DR, GV et SU tournent dans le sens des aiguilles d'une montre ou en sens inverse. On conçoit donc que ces directions puissent passer au-dessus de l'axe PO, au lieu d'être au-dessous comme elles sont indiquées sur la figure ; le halo, dans ce cas, sera bordé de rouge à l'extérieur et, d'ailleurs, plus ou moins lavé de blanc.

C. R.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### Ecole polytechnique [1] (1894).

ALGÈBRE

**201.** — Calculer le nombre $e$ à $\frac{1}{10^n}$ près. (F.)

**202.** — On suppose que l'équation $f(x) = 0$ a toutes ses racines réelles; on considère l'équation $\frac{xf'(x)}{f(x)} = A$. Démontrer que cette équation a toutes ses racines réelles. (C.)

**203.** — Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série soit convergente est que la somme des $p$ termes qui suivent le $n^e$ tende vers 0, $p$ étant aussi grand que l'on voudra. (L.)

**204.** — Etudier la fonction $y = \frac{1 - x^{2n+1}}{1 - x^2}$. (P.)

**205.** — Que peut-on dire des racines de l'équation

$$(2n-1)x^{2n+2} - (2n+1)x^{2n} + 2x = 0 \text{ ?}$$ (P.)

**206.** — Combien l'équation $x^4 + px + q = 0$ a-t-elle de racines réelles ? (P.)

[1] Nous ne publions que les questions qui ne sont pas textuellement des questions de cours. Chaque question est suivie de l'initiale du nom de l'examinateur qui l'a posée. Nous ne garantissons pas l'absolue authenticité de ces questions.

**207.** — Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{x^3+1}{(x^2+2x+5)^2}.$$ P.

**208.** — Valeur de $y = \operatorname{tang} x - x$, quand $x$ tend vers 0 : $x$ étant l'infiniment petit principal, quel est l'ordre de $y$? Sa valeur principale ? On arrive à la forme $y = \frac{x^3}{8}(1+\varepsilon)$ ; quel est l'ordre de $\varepsilon$ ? (P.)

**209.** — Pour appliquer la méthode d'approximation de Newton, est-il indispensable d'avoir séparé les racines ? (C.)

**210.** — La série dont le terme général est $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$ est-elle convergente ? Trouver sa somme. (C.)

**211.** — Condition pour que l'équation $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ ait trois racines réelles.

**212.** — Calculer la différence $n^e$ de $\sin x$ (L.)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**389.** — On considère les coniques osculatrices à un cercle donné en un point O, et telles que l'un des foyers, F, soit sur le cercle, et on demande :

1° Le lieu du second foyer, F′, de ces coniques ;
2° Le lieu de leurs centres ;
3° L'enveloppe des axes focaux ;
4° Le lieu des sommets situés sur les axes focaux. (Vasnier, collège Rollin.)

**390.** — Les normales à une quadrique en tous les points d'une section circulaire forment une surface qui admet une directrice rectiligne et dont les sections par des plans parallèles à celui de la section circulaire sont des conchoïdes de coniques et exceptionnellement des conchoïdes de droites. (A. Goulard.)

**391.** — Le plus grand nombre entier contenu dans

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$$

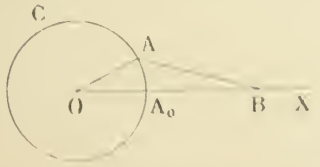
est égal ou supérieur d'une unité au plus grand nombre entier contenu dans $\mathrm{L}(n+1)$.

(A. Goulard.)

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ET CINÉMATIQUE

**245.** — *Dans un plan on donne un cercle O de rayon r et une droite indéfinie OX passant par son centre. L'extrémité A d'une droite AB de longueur invariable se meut sur la circonférence O d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω, pendant que l'extrémité B se déplace sur OX* ($AB = a$, $a > r$).




*1° Trouver les formules permettant de calculer la vitesse du point B à un instant donné et pour une position donnée du point A. (On prendra pour origine des temps l'instant où le point A est en $A_0$).*

*2° Trouver l'équation dont la résolution ferait connaître la position $A_1$ occupée par le point A lorsque la vitesse du point B est maximum. Discuter cette équation.*

*En appelant* $A_2$ *la position du point* A *pour laquelle la droite* AB *est tangente au cercle* O, *dire les positions respectives des points* $A_1$ *et* $A_2$.

*3° Résoudre l'équation précédente, et placer le point* $A_1$ *sur la circonférence* O, *en supposant* $a = 2r$.

Nous prendrons pour axe des $x$ positif la demi-droite OB, pour axe des $y$ une perpendiculaire dirigée dans un sens tel que la rotation du point A sur le cercle O s'effectue dans le sens direct de $Ox$ vers $Oy$.

1° Appelons alors X et Y les coordonnées du point mobile A, à l'époque $t$ ; nous aurons

$$X = r\cos\omega t, \qquad Y = r\sin\omega t$$

et

$$X^2 + Y^2 = r^2.$$

Le triangle OAB nous donne alors

$$a^2 = \overline{OB}^2 + r^2 - 2r\,OB\cos\omega t,$$

et, si nous posons

$$a^2 = r^2 + b^2, \qquad OB = x,$$

$$x^2 - 2xX - b^2 = 0;$$

$x$ étant positif par hypothèse, nous déduisons de là

$$x = X + \sqrt{X^2 + b^2}.$$

Telle est l'équation qui donne la position du point B, quand on connaît celle du point A. On en conclut immédiatement la vitesse du point B,

$$v = \frac{dx}{dt} = X' + \frac{XX'}{\sqrt{X^2+b^2}}, \qquad \left(X' = \frac{dX}{dt}\right),$$

ou

$$v = \frac{X'x}{\sqrt{X^2+b^2}}.$$

Cette équation nous montre que $v$ est négatif en même temps que $X'$, c'est-à-dire en même temps que la vitesse de la projection du point A sur OX.

2 Pour que la vitesse du point B soit maximum, il faut que la dérivée de la fonction précédente soit nulle, par suite que l'on ait

$$\frac{X''x}{\sqrt{X^2+b^2}} + \frac{X'x'}{\sqrt{X^2+b^2}} - \frac{XxX'^2}{(\sqrt{X^2+b^2})^3} = 0,$$

ou

$$X''x + X'x' - \frac{xXX'^2}{X^2+b^2} = 0.$$

Or on a

$$x' = \frac{xX'}{\sqrt{X^2+b^2}}, \qquad X' = -\omega Y, \qquad X'' = -\omega^2 X;$$

en substituant ces valeurs dans l'équation précédente, supprimant le facteur $x$ et le facteur $\omega^2$, il vient successivement

$$-X + \frac{Y^2}{\sqrt{X^2+b^2}} - \frac{XY^2}{X^2+b^2} = 0,$$

$$-X(X^2+Y^2+b^2) + Y^2\sqrt{X^2+b^2} = 0,$$

$$-a^2X + Y^2\sqrt{X^2+b^2} = 0,$$

et finalement

$$a^4X^2 = (X^2+b^2)(r^2-X^2)^2.$$

Cette équation se simplifie notablement si on pose $X^2 + b^2 = u$, et devient

$$u^3 - 2a^2u^2 + a^4b^2 = 0. \qquad (1)$$

Les calculs à faire pour avoir la position du point $A_1$ sont donc indiqués par le tableau suivant :

$$(a)\quad \left|\begin{array}{l} u_1^3 - 2a^2u_1^2 + a^4b^2 = 0, \\ X_1 = \sqrt{u_1 - b^2}\,; \end{array}\right.$$

remarquons avant d'aller plus loin que le calcul de $X_1$ ne prête à aucune ambiguïté, car l'équation que doit vérifier $X_1$ est

$$-a^2X_1 + Y_1^2\sqrt{X_1^2 + b^2} = 0,$$

et montre que $X_1$ doit être positif.

Nous voyons donc que le nombre cherché $X_1$ doit être positif et compris entre 0 et $r$; par suite il ne faudra accepter que les valeurs de $u$ comprises entre $b^2$ et $a^2$. Or le théorème de Descartes nous apprend que l'équation (1) a une racine négative et deux racines positives au plus ; d'ailleurs la substitution à $u$ des nombres 0, $a^2$ et $+\infty$ donne les signes $+$, $-$ et $+$ ; donc les deux racines positives existent et sont comprises entre 0 et $a^2$, $a^2$ et $+\infty$.

La première seule peut convenir : elle ne sera acceptable que si elle est plus grande que $b^2$, c'est-à-dire si le résultat que l'on obtient en mettant $b^2$ à la place de $u$ est positif ; ceci a lieu, puisque ce résultat est $b^2(a^2 - b^2)^2$. Il y a donc une valeur de $u$ qui convient, la plus petite racine positive de l'équation (1).

Cherchons maintenant l'abscisse du point $A_2$. En appelant $\alpha$ l'angle que fait $OA_2$ avec $OX$, on a immédiatement $a = r \operatorname{tg} \alpha$; d'où

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\cos\alpha}{r} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + r^2}}\,;$$

l'abscisse du point $A_2$ a donc pour valeur

$$X_2 = r\cos\alpha = \frac{r^2}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Pour comparer cette valeur à $X_1$ formons la valeur de $u$ qui correspond à $X_2$,

$$u_2 = X_2^2 + b^2 = \frac{r^4 + b^2(a^2 + r^2)}{a^2 + r^2} = \frac{a^4}{a^2 + r^2},$$

et substituons cette valeur à $u$ dans l'équation (1) ; nous aurons, en multipliant par $(a^2 + r^2)^3$ qui est positif, et remplaçant $a^2 + r^2$ par $2a^2 - b^2$,

$$a^{12} - 2a^{10}(2a^2 - b^2) + a^4b^2(2a^2 - b^2)^3.$$

Divisons par $a^4$, qui est positif, et simplifions ; nous aurons finalement à reconnaître le signe de

$$-3a^8 + 10a^6b^2 - 12a^4b^4 + 6a^2b^6 - b^8.$$

Or cette expression peut s'écrire

$$(-3a^2 + b^2)(a^2 - b^2)^3\,;$$

elle est négative ; donc $u_2 > u_1$ ; par suite $X_2 > X_1$, et le point $A_2$ est plus près de $A_0$ que $A_1$.

3° Dans le cas où $a = 2r$, on a $b^2 = 3r^2$, $b^2 = \frac{3a^2}{4}$, et l'équation (1) devient

$$u^3 - 2a^2u^2 + \frac{3a^6}{4} = 0\,;$$

cette équation ne peut admettre comme racines rationnelles que quelques-uns des nombres $\pm a^2$, $\pm\frac{a^2}{2}$, $\pm\frac{a^2}{4}$, $\pm 3a^2$, $\pm\frac{3a^2}{2}$, $\pm\frac{3a^2}{4}$. Elle n'admet aucun de ces nombres comme racine ; il ne reste plus alors qu'à lui appliquer les procédés généraux ; la méthode de Newton donne en particulier pour valeurs approchées de la racine positive moindre que $a^2$,

$$\frac{3a^2}{4},\qquad \frac{11a^2}{14},\qquad a^2\left(\frac{11}{14} + \frac{1}{11\times 14\times 23}\right),\qquad \ldots$$

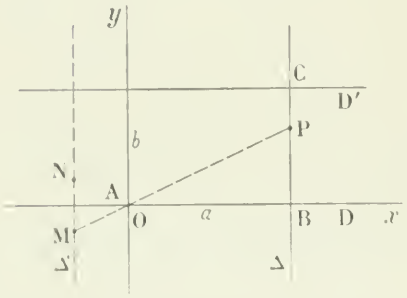
**378.** — *Trouver l'équation générale des coniques tangentes à une droite* D *en un point* A, *à une droite* D′ *parallèle à* D, *et à une troisième droite* Δ *perpendiculaire à* D *et* D′.

*1° Trouver, pour chacune de ces coniques, l'équation de la seconde tangente parallèle à* Δ *et l'équation de la corde des contacts avec les droites* D *et* Δ.

*2° On demande alors le lieu du point de rencontre de la tangente parallèle à* Δ *avec cette corde des contacts et aussi le lieu du point de contact de cette seconde tangente avec la conique.*

*3° On demande en outre le lieu des foyers des coniques du système et de construire ce lieu.*

Nous prendrons comme axes de coordonnées la droite D et la perpendiculaire à cette droite menée par le point de contact A ; nous désignerons par $a$ et $b$ les distances de ce point de contact aux deux droites donnés Δ et D′, et nous choisirons les directions positives des axes de façon que $a$ et $b$ soient l'abscisse commune aux points de la droite Δ et l'ordonnée commune aux points de la droite D′.




Nous pouvons écrire de suite l'équation générale des coniques tangentes en O à $Ox$ ; c'est

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2y = 0.$$

Il nous reste à exprimer que cette conique rencontre chacune des droites $x = a$ et $y = b$ en deux points confondus ; c'est-à-dire qu'en faisant $x = a$ ou $y = b$ dans l'équation de la conique, l'équation du second degré en $y$ ou en $x$ que l'on obtient ainsi a une racine double ; on trouve par ce procédé les deux conditions

$$a^2(B^2 - AC) - 2Ba + 1 = 0,$$

$$b(B^2 - AC) + 2A = 0.$$

Nous poserons alors $B^2 - AC = -\lambda$, et nous déduirons immédiatement de ces équations

$$A = \frac{b\lambda}{2}, \qquad B = \frac{1 - a^2\lambda}{2a};$$

en portant ces valeurs dans l'équation qui définit le paramètre $\lambda$, $B^2 - AC + \lambda = 0$, nous aurons de suite C,

$$C = \frac{(1 - a^2\lambda)^2 + 4a^2\lambda}{2a^2b\lambda} = \frac{(1 + a^2\lambda)^2}{2a^2b\lambda}.$$

Il n'y a plus qu'à mettre ces valeurs de A, B, C dans l'équation de la conique pour obtenir de suite l'équation générale demandée

$$b\lambda x^2 + 2\frac{1 - a^2\lambda}{a}xy + \frac{(1 + a^2\lambda)^2}{a^2b\lambda}y^2 - 4y = 0. \qquad (1)$$

**1°** Les droites parallèles à $Oy$ et qui touchent la conique (1) sont celles dont les équations sont de la forme $x = h$, $h$ étant choisi de façon que l'équation aux ordonnées des points de rencontre de la conique avec la droite $x = h$ ait une racine double. Faisons donc $x = h$ dans l'équation (1) et exprimons que le trinome en $y$ est un carré parfait ; nous aurons ainsi

$$\frac{(1 + a^2\lambda)^2}{a^2b\lambda}y^2 + 2\left(\frac{1 - a^2\lambda}{a}h - 2\right)y + b\lambda h^2 = 0,$$

pour équation aux ordonnées, et

$$\lambda h^2 + \frac{1 - a^2\lambda}{a}h - 1 = 0,$$

pour équation de condition.

Cette dernière équation admet pour racines $h = a$ et $h = -\frac{1}{a\lambda}$. La tangente Δ′, parallèle à Δ,

a donc pour équation
$$x + \frac{1}{a\lambda} = 0. \tag{2}$$

L'ordonnée du point de contact est la demi-somme des racines de l'équation en $y$, puisque celle-ci a une racine double, et l'on a ainsi, pour ordonnée du point de contact avec $x = h$,

$$y_1 = \frac{2 - \dfrac{1 - a^2\lambda}{a}\, h}{\dfrac{(1 + a^2\lambda)^2}{a^2 b\lambda}};$$

lorsque $h = a$, on a
$$y_1 = \frac{a^2 b\lambda}{1 + a^2\lambda},$$

et lorsque $h = -\dfrac{1}{a\lambda}$,
$$y_1' = \frac{b}{1 + a^2\lambda}.$$

L'équation de la corde des contacts de la conique (1) avec les droites $\Delta$ et D est donc

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{a} \qquad \text{ou} \qquad y = x\,\frac{ab\lambda}{1 + a^2\lambda}. \tag{3}$$

Les coordonnées du point de contact de $\Delta'$ avec la conique (1) sont

$$x = -\frac{1}{a\lambda} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{b}{1 + a^2\lambda}. \tag{4}$$

**2°** L'équation du lieu du point de rencontre de la tangente $\Delta'$ avec la corde des contacts de D et $\Delta$ s'obtient en éliminant $\lambda$ entre $x = -\dfrac{1}{a\lambda}$ et l'équation (3) ; on obtient ainsi très facilement l'équation

$$y(x - a) + bx = 0, \tag{5}$$

qui représente une hyperbole équilatère passant à l'origine des coordonnées et dont les asymptotes parallèles aux axes, sont les droites $x = a$ (droite $\Delta$) et $y = -b$ (symétrique de D' par rapport à $Ox$) ; rien n'est plus aisé alors que de construire cette hyperbole par points.

Nous aurons tout aussi aisément le lieu du point de contact de $\Delta'$ avec la conique (1), en éliminant $\lambda$ entre les équations (4) ; nous trouvons ainsi

$$y(x - a) - bx = 0, \tag{6}$$

hyperbole équilatère qui passe à l'origine et qui admet pour asymptotes les droites D et $\Delta$.

**3°** Pour traiter la deuxième partie, représentons l'équation de la conique (1) par

$$f(x, y) \equiv Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 4y = 0,$$

et désignons par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du foyer. L'équation $f(x, y) = 0$ pourra s'écrire aussi

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (ux + vy + w)^2 = 0,$$

pour certaines valeurs de $u$, $v$, $w$, et l'on devra pouvoir trouver un nombre K tel que l'identité suivante ait lieu ;

$$f(x, y) = K[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 - (ux + vy + w)^2],$$

ou, ce qui revient au même, tel que $f(x, y) - K[(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2]$ soit identique à un carré parfait. Le calcul indiqué se fera très simplement en remplaçant $x$ et $y$ par $x + \alpha$, $y + \beta$, et identifiant le premier membre,

$$(A - K)x^2 + 2Bxy + (C - K)y^2 + 2(A\alpha + B\beta)x + 2(B\alpha + C\beta - 2)y = f(\alpha, \beta),$$

avec le carré d'une fonction linéaire $ux + vy + w$. On trouve ainsi

$$A - K = u^2, \qquad B = uv, \qquad C - K = v^2,$$
$$A\alpha + B\beta = uw, \qquad B\alpha + C\beta - 2 = vw, \qquad f(\alpha, \beta) = w^2,$$

et de là on déduit, par des combinaisons faciles,

$$(A - K)f(\alpha, \beta) - (A\alpha + B\beta)^2 = 0,$$
$$(C - K)f(\alpha, \beta) - (B\alpha + C\beta - 2)^2 = 0,$$
$$Bf(\alpha, \beta) - (A\alpha + B\beta)(B\alpha + C\beta - 2) = 0;$$

en retranchant les deux premières l'une de l'autre, on a finalement les deux équations

$$(A - C)f(\alpha, \beta) + (B\alpha + C\beta - 2)^2 - (A\alpha + B\beta)^2 = 0,$$
$$Bf(\alpha, \beta) - (A\alpha + B\beta)(B\alpha + C\beta - 2) = 0,$$

qu'il faudra simplifier d'abord, puis entre lesquelles on devra éliminer $\lambda$. Ces deux équations simplifiées sont

$$(B^2 - AC)(\alpha^2 - \beta^2) - 4B\alpha - 4A\beta + 4 = 0,$$
$$(B^2 - AC)\alpha\beta + 2A\alpha - 2B\beta = 0.$$

Il n'y a plus qu'à remplacer A, B, C par les valeurs qu'on obtient en comparant $f(x, y) = 0$ avec l'équation (1), et l'on a, après de légères simplifications,

$$\lambda(\alpha^2 - \beta^2) + \frac{1 - a^2\lambda}{a}\alpha + b\lambda\beta - 1 = 0,$$
$$2\lambda\alpha\beta - b\lambda\alpha + \frac{1 - a^2\lambda}{a}\beta = 0.$$

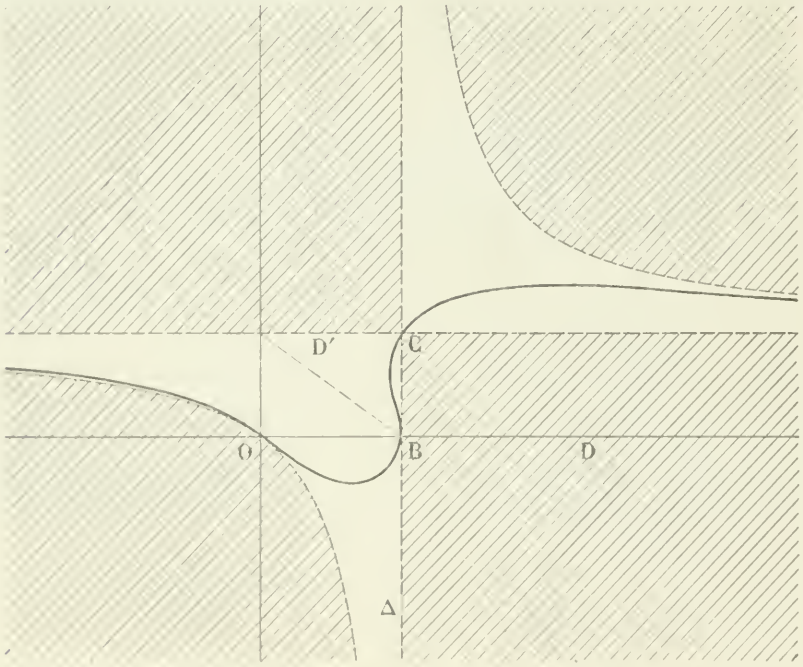
L'élimination de $\lambda$ entre ces deux équations est immédiate et donne l'équation du lieu cherché,

$$\beta(\alpha^2 + \beta^2) - b\alpha^2 - 2a\alpha\beta - b\beta^2 + ab\alpha + a^2\beta = 0. \qquad (7)$$

Pour construire cette courbe, nous remarquons que l'équation (7) peut s'écrire

$$\beta^2(\beta - b) + (\alpha - a)[\beta(\alpha - a) - b\alpha] = 0.$$

Construisons alors les droites $\beta - b = 0$, $\alpha - a = 0$ et l'hyperbole $\beta(\alpha - a) - b\alpha = 0$, c'est-à-dire les droites D′, Δ et l'hyperbole (6) (ces éléments sont représentés en pointillé sur la figure); nous voyons de suite que dans les régions hachurées il n'y a pas de points de la courbe. D'autre part la courbe passe à l'origine et y admet pour tangente $\frac{\alpha}{a} + \frac{\beta}{b} = 0$; elle admet pour asymptote la droite $\beta - b = 0$ ou D′; elle est tangente à la droite $\alpha - a = 0$ ou Δ au point B et la coupe au point C. Sa forme résulte de toutes ces remarques.




Il y a d'ailleurs deux vérifications importantes : la première s'obtient en cherchant la position de la courbe par rapport à son asymptote $\beta - b = 0$ ; comme l'équation de la courbe donne

$$\beta - b = \frac{a\beta(\alpha - a)}{\alpha(\alpha - a) + \beta^2},$$

nous voyons de suite que si $\alpha = +\infty$, $\beta$ étant voisin de $b$, $\beta - b$ est infiniment petit et positif, et que si $\alpha = -\infty$, $\beta - b$ est infiniment petit et négatif; la seconde vérification s'obtient en coupant par des droites passant à l'origine, en formant l'équation en coordonnées polaires : on trouve de suite

$$\rho^2 \sin\omega - (b + 2a \sin\omega \cos\omega)\rho + a(b \cos\omega + a \sin\omega) = 0,$$

et la condition de réalité des racines de cette équation en $\rho$ est $b^2 - 4a^2 \sin^4\omega > 0$; elle donne

$$|\sin\omega| < \sqrt{\frac{b}{2a}}.$$

Tous ces résultats concordent avec la forme adoptée.

*Remarque.* — Les lecteurs habituels de la première partie pourront traiter aisément ce problème à l'aide des coordonnées tangentielles.

Solution par les coordonnées tangentielles : M. P. Hostalot (cette solution contient quelques erreurs).

Autres solutions (toutes incomplètes) : MM. F. Pégorier (répétiteur au collège de Cette) ; Garchery (Moulins) ; Henri Bonnard, lycée de Bordeaux ; G. Martinet, lycée de Toulouse ; G. A. Pouilliart.

## CONCOURS DE 1894 (*Suite*)

### École des Mines de Saint-Étienne.

*Mathématiques.*

I. — **392.** On donne les deux expressions

$$P = \frac{x^5}{4} - ax^4 + x^3\left(a^2 - \frac{3}{2}\right) + x^2(6a - 1) - x(6a^2 - 4a) - 4a^2,$$

$$Q = e^{\frac{x}{\lg x}} - e^{\frac{\pi}{4}}.$$

On sait en outre que P est divisible par $x - 1 - \sqrt{3}$. $a$ est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

On demande :

1° De pousser aussi loin que possible la résolution de l'équation $P = 0$ ;

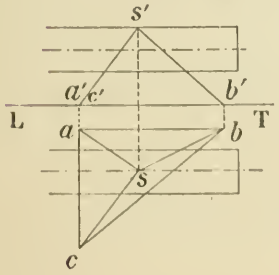
2° De pousser aussi loin que possible la résolution de l'équation $Q = 0$ ;

3° De construire les racines de l'équation $P - Q = 0$ ;

4° D'étudier les variations des racines de $P - Q = 0$, lorsque $a$ prend toutes les valeurs qu'il peut prendre entre $-\infty$ et $+\infty$.

Observer soigneusement l'ordre et le numérotage adoptés.

II. — Calculer les côtés et les angles du quadrilatère inscriptible ABCD, dont on connaît :

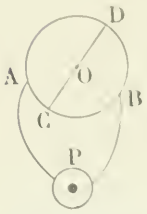



$AB = 79^m,518$, $BC = 212^m,048$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $\widehat{BCD} = 51^\circ 47' 12'',50$.

III. — Étant donné un cylindre de révolution parallèle à la ligne de terre, déterminer son intersection avec un trièdre dont le sommet se trouve sur la génératrice culminante du cylindre, dont une face est parallèle à la ligne de terre, la seconde face perpendiculaire au plan vertical, et la troisième quelconque. Dans le dessin ci-contre, le trièdre est représenté par la pyramide SABC.

Représenter à part le solide commun : rabattre ses trois faces planes et développer sa face cylindrique.

*Physique et Chimie.*




**393.** — On considère un conducteur rectiligne CD, mobile autour de son milieu O, et dont les extrémités parcourent un conducteur circulaire de même métal et de même section, dont le centre est au point O. En deux points A et B du conducteur circulaire sont fixés les deux fils issus des pôles d'une pile P. On donne :

Le diamètre $CD = d$ du conducteur circulaire. Sa résistance par unité de longueur sera prise égale à l'unité ;

La longueur $m$ de l'arc AB ;

La résistance R du circuit extérieur APB et de la pile, et la force électromotrice E de la pile.

Déterminer l'intensité et le sens du courant qui traverse le conducteur CD dans les diverses positions de ce conducteur.

**394.** — Etant donné un combustible dont la composition centésimale en poids est la suivante :

Carbone 84, Hydrogène 6,60, Oxygène 8, Azote 1,40,

on suppose que 1 kilogramme de cette substance est brûlé par la quantité d'air strictement nécessaire à sa combustion complète. On demande :

1° Le volume d'air nécessaire, mesuré à la température de 0° et à la pression de $760^{mm}$ de mercure ;

2° La composition centésimale en volume, à la température de 100°, du gaz résultant de la combustion ; le volume total de ce gaz, mesuré à 0° et $760^{mm}$ ; la densité de ce gaz, dans les mêmes conditions. On supposera l'air composé exactement de 4 vol. d'azote pour 1 vol. d'oxygène.

La tension de la vapeur d'eau à 0° est égale à $4^{mm},57$ de mercure.

Le volume de 1 gramme d'hydrogène à 0° et $760^{mm}$ de mercure est de $11^{lit},16$.

Enfin les nombres proportionnels des divers éléments sont :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Poids atomiques : | Carbone 12 | Hydrogène 1 | Oxygène 16 | Azote 14 |
| Equivalents : | — 6 | — 1 | — 8 | — 14 |

Aucune autre donnée ne devra être employée.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**395.** — On considère deux cercles fixes C, C′ et un cercle Γ de rayon constant dont le centre est mobile sur C. On demande l'enveloppe de l'axe radical Δ des cercles Γ et C′.

(G. Tzitzéica, Bucarest.)

**396.** — On considère, sur une ellipse fixe de foyers F et F′, un point M quelconque. Montrer que les deux ellipses ayant pour foyers, l'une, F et M, l'autre, F′ et M, et passant respectivement en F′ et en F, ont la somme de leurs grands axes constante, ainsi que la somme des carrés de leurs petits axes.

(E. N. Barisien.)

**397.** — On donne une ellipse E,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et un point P $(\alpha, \beta)$ dont la polaire par rapport à E coupe l'ellipse E en M et N.

1° Former l'équation générale des coniques C qui passent par M et N, et telles que MN soit la polaire de O par rapport à chacune de ces coniques.

2° Trouver le lieu des points où les coniques C sont coupées par leurs diamètres parallèles à MN.

3° Démontrer qu'à chaque point P correspondent deux coniques C tangentes à E. Indiquer la correspondance qui existe entre la position du point P et la nature des coniques C tangentes à E.

(Bioche.)

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

5e Année. N° 6 Mars 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### QUADRATURE DE LA CYCLOIDE

d'après le P. Tacquet. (*Opera mathematica*, editio secunda, Antverpiæ, 1707).

Note de M. G. Maupin.

Le P. Tacquet, après avoir parlé des travaux de Torricelli et de Descartes sur la cycloïde, propose (*) pour effectuer la quadrature de cette courbe une méthode qui revient à ce qui suit.

Soit FGMPS un arc de cycloïde engendré par le roulement du cercle BS sur sa tangente BF. Inscrivons dans le demi-cercle BS une ligne brisée régulière BKORS d'un nombre quelconque, mais pair, de côtés. Soit, par exemple, 4. Divisons BF en quatre parties égales, aux points C, D, E, et figurons les positions du cercle générateur qui passent par ces trois points. Enfin par K, O, R, menons les parallèles à BF et marquons les points où ces lignes rencontrent les cercles.

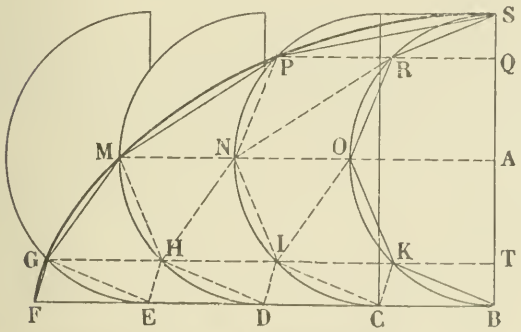


Figure extraite des *Opera mathematica* du P. Tacquet (schematismos XVII, fig. 127).

Les droites GH, HI, IK, MN, NO, PR sont toutes égales à BC, quart de BF. Considérons l'espace compris entre les lignes brisées FGMPS, SROKB et la droite BF. Il se compose de quatre groupes de triangles :

le premier groupe comprend un seul triangle, PSR ;
le second comprend trois triangles, MPN, NRO, PRN ;
le troisième comprend cinq triangles, GMH, HNI, IOK, MNH, NOI ;
le quatrième comprend sept triangles, FGE, EHD, DIC, CKB, GHE, HID, IKC.

Ces nombres 1, 3, 5, 7 sont, comme on le voit, quatre termes consécutifs d'une progression arithmétique : on a $1 + 7 = 3 + 5$. Ainsi le premier groupe et le quatrième réunis comprennent huit triangles, le deuxième et le troisième réunis également huit triangles. Les huit premiers triangles sont équivalents entre eux, les huit autres aussi. Les huit premiers ont une même base égale à BC, une même hauteur égale à BT ; les huit seconds ont encore une même base BC, une même hauteur AT. La somme des seize triangles équivaut donc à un triangle ayant pour base deux fois BF et pour hauteur BA : or ce triangle, ainsi que nous l'enseigne Archimède, est le double du demi-cercle BS.

Voici donc une propriété bien remarquable. On peut se convaincre qu'elle est générale quel que soit

(*) Nunc, quod paulò ante promisimus exequamur ; et Nobilissimi Theorematis novam atque universalem demonstrationem a nobis excogitatam subjungamus (p. 517, de Circulorum Volutionibus).

le nombre (pair) des côtés de la ligne brisée inscrite, en remarquant, ce dont le P. Tacquet fait l'objet d'un lemme spécial, que dans la suite 1, 3, 5, 7, 9, 11, ..... la somme de deux termes équidistants des extrêmes est constante.

Il est alors aisé de conclure qu'à la limite, lorsqu'on augmente indéfiniment le nombre des côtés de la ligne brisée inscrite, l'espace compris entre la cycloïde, le demi-cercle et la base BF équivaut au double du demi-cercle générateur.

## ALGÈBRE

**380.** *Démontrer l'identité*

$$2^{2n+1}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\frac{1}{2}}\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}e^{\sqrt{x}}\right) = e^{\sqrt{x}}.$$

**Première solution.** — Désignons par $y$ la fonction $e^{\sqrt{x}}$ ; on a

$$2y'\sqrt{x} = y,$$

et en prenant les dérivées des deux membres,

$$2y''\sqrt{x} + \frac{y'}{\sqrt{x}} = y',$$

ou

$$2y''x + y' = y'\sqrt{x} = \frac{y}{2},$$

$$4xy'' + 2y' - y = 0.$$

Prenons la dérivée d'ordre $n-1$ du premier membre ; en appliquant la formule de Leibniz, on trouve aisément

$$4xy^{(n+1)} + (4n-2)y^{(n)} - y^{(n-1)} = 0, \qquad (1)$$

où $y^{(n+1)}$ désigne la dérivée d'ordre $n+1$ de $y$.

Posons

$$X_n = 2^{2n+1}x^{n+\frac{1}{2}}y^{(n+1)},$$

et remplaçons dans l'identité (1) $y^{(n+1)}$, $y^{(n)}$, $y^{(n-1)}$ en fonction de $X_n$, $X_{n-1}$, $X_{n-2}$ ; on a

$$X_n + (4n-2)X_{n-1} - 4xX_{n-2} = 0. \qquad (2)$$

Il faut démontrer que

$$\frac{d^nX_n}{dx^n} = y.$$

On vérifie sans peine la formule dans les deux cas particuliers où $n$ est nul ou égal à 1 ; supposons que la formule a lieu pour $X_{n-1}$ et $X_{n-2}$, et démontrons-la pour $X_n$.

De l'identité (2) on tire

$$\frac{d^nX_n}{dx^n} + (4n-2)\frac{d^nX_{n-1}}{dx^n} - 4\frac{d^n}{dx^n}(xX_{n-2}) = 0,$$

ce qui peut s'écrire, en admettant les relations

$$\frac{d^{n-1}X_{n-1}}{dx^{n-1}} = y, \qquad \frac{d^{n-2}X_{n-2}}{dx^{n-2}} = y,$$

$$\frac{d^nX_n}{dx^n} + (4n-2)y' - 4(xy'' + ny') = 0,$$

ou

$$\frac{d^nX_n}{dx^n} = 4xy'' + 2y' = y.$$

**Deuxième solution.** — Nous nous appuierons sur ce que $e^{\sqrt{x}}$ est développable en série convergente quel que soit $x$, et qu'on peut obtenir les dérivées successives de cette fonction en différentiant les termes de la série.

On a
$$e^{\sqrt{x}} = \sum \frac{x^{\frac{m}{2}}}{m!}$$
$$\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{\sqrt{x}} = \sum \frac{m(m-2)\cdots(m-2n)}{m!\ 2^{n+1}} x^{\frac{m-2n+1}{2}}.$$

Multiplions par $x^{n+\frac{1}{2}}$ les deux membres et prenons la dérivée d'ordre $n$ ; nous aurons
$$\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{\sqrt{x}}\right) = \sum \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-2n+1)(m-2n)}{m!\ 2^{2n+1}} x^{\frac{m-2n-1}{2}}$$

ou
$$2^{2n+1} \frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\frac{1}{2}} \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} e^{\sqrt{x}}\right) = \sum \frac{x^{\frac{m-2n-1}{2}}}{(m-2n-1)!} = e^{\sqrt{x}}.$$

R. ESCOT, à Labastide-sur-Lhers.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**374.** — *On sait que tout plan* P *coupe une cubique gauche en trois points* A, B, C :

*1° Trouver le lieu du centre de gravité du triangle* ABC *quand le plan* P *se meut en restant parallèle à un plan fixe* Q.

*2° Ce lieu étant une droite* D, *prouver que si l'on fait varier la direction du plan* Q, *il passe, en général, une droite* D *et une seule par tout point de l'espace, et trouver le lieu des points de l'espace par lesquels il passe une infinité de droites* D.

*3° Prouver que ce lieu est une cubique* (C) *dont les droites* D *sont des sécantes doubles.*

*4° A toute cubique on en fait ainsi correspondre une autre* (C). *A la cubique* (C) *on peut faire correspondre une autre cubique* ($C_1$) *par le même procédé, et ainsi de suite indéfiniment. Quelle est la limite de toutes ces cubiques ?*

*5° Quel est le lieu du centre de gravité du triangle* ABC *quand le plan* Q *est assujetti à passer par une droite ?*

*6° Quel est le lieu du centre de gravité du triangle* ABC *quand le plan* Q *est assujetti à demeurer tangent à un cône de la $n^{ième}$ classe* (*) ?

**1°** On sait que si l'on coupe une courbe algébrique plane par une série de droites parallèles, le lieu des centres des moyennes distances des points d'intersection de chaque sécante avec la courbe est une droite (diamètre de Newton). On sait de plus que le centre des moyennes distances des $m$ points d'intersection d'une droite avec une courbe algébrique d'ordre $m$, est le même que celui des points d'interjection de la même droite avec les $m$ asymptotes de la courbe.

Il suit d'abord de là que si l'on projette la cubique sur un plan $\varpi$, parallèlement à une direction $\Delta$ du plan Q, la projection du lieu du centre de gravité du triangle ABC est une droite. Sur un autre plan $\varpi_1$, parallèlement à une autre direction $\Delta_1$ du même plan Q, la projection du lieu est une autre droite. Il en résulte que le lieu du centre de gravité du triangle ABC est lui-même une droite D.

D'ailleurs, de ce que le centre des moyennes distances des points de rencontre d'une droite et d'une courbe est le même que celui des points de rencontre de la droite et des asymptotes, il suit que l'on peut, dans l'énoncé du problème, remplacer la cubique par le système des asymptotes. Nous n'examinerons, du reste, que le cas où la cubique a trois asymptotes réelles, distinctes et à distance finie ; de sorte que nous pouvons supposer les axes de coordonnées parallèles aux asymptotes, et l'origine confondue avec le centre du parallélipipède déterminé par ces trois droites.

(*) Par erreur dans 5° et 6° on a écrit le plan P au lieu du plan Q (voir le n° de novembre).

Soient alors

$$\left.\begin{array}{l} y = \beta \\ z = -\gamma \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} z = \gamma \\ x = -\alpha \end{array}\right\} (2) \qquad \left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\beta \end{array}\right\} (3)$$

les équations des trois asymptotes, et

$$ux + vy + wz = 0$$

l'équation du plan Q. L'équation du plan P sera

$$ux + vy + wz + \lambda = 0,$$

et, en déterminant ses points de rencontre avec les droites (1), (2) et (3), on voit immédiatement qu'un point quelconque de la droite D est défini par les trois équations

$$\left.\begin{array}{l} 3ux + \beta v - \gamma w + \lambda = 0, \\ 3vy + \gamma w - \alpha u + \lambda = 0, \\ 3wz + \alpha u - \beta v + \lambda = 0, \end{array}\right\} (4)$$

et que les équations de la droite D sont

$$3ux + \beta v - \gamma w = 3vy + \gamma w - \alpha u = 3wz + \alpha u - \beta v\ ;$$

elles sont homogènes en $u$, $v$, $w$.

2° Considérons, dans les équations (4), $x$, $y$, $z$ comme les coordonnées d'un point de l'espace, ce qui revient à exprimer que la droite D passe par ce point. Si alors les trois déterminants

$$\begin{vmatrix} \beta & -\gamma & 1 \\ 3y & \gamma & 1 \\ -\beta & 3z & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \gamma & -\alpha & 1 \\ 3z & \alpha & 1 \\ -\gamma & 3x & 1 \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \alpha & -\beta & 1 \\ 3x & \beta & 1 \\ -\alpha & 3y & 1 \end{vmatrix}$$

ne sont pas nuls simultanément, ces équations définissent un système unique de valeurs proportionnelles à $u$, $v$, $w$ ; par suite, il y a en général une droite et une seule passant par tout point de l'espace.

Si, au contraire, les trois déterminants précédents sont nuls simultanément, les équations (4) définissent une infinité de systèmes de valeurs proportionnelles à $u$, $v$, $w$, et il passe une infinité de droites D par le point considéré. Les coordonnées des points par lesquels il passe une infinité de droites D satisfont donc aux équations que l'on obtient en égalant ces trois déterminants à zéro. Ces équations développés et ordonnées sont :

$$\left.\begin{array}{l} 3yz - \beta z + \gamma y + \beta\gamma = 0, \\ 3zx - \gamma x + \alpha z + \gamma\alpha = 0, \\ 3xy - \alpha y + \beta x + \alpha\beta = 0. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Elles représentent trois cylindres du second degré. Si l'on considère d'abord les cylindres représentés par deux d'entre elles, les deux premières par exemple, ces cylindres ont deux plans asymptotiques parallèles : ils se coupent donc suivant une cubique gauche. Si d'ailleurs on cherche la projection de cette cubique sur le plan des $xy$, on trouve la troisième équation (5). Donc les trois cylindres représentés par les équations (5) ont en commun une cubique gauche.

3° Donc le lieu des points par lesquels il passe une infinité de droites D est une cubique gauche (C). Les droites D sont des sécantes doubles de cette cubique ; car, si l'on cherche les points de rencontre de la droite définie par les équations (4) avec chacun des cylindres représentés par les équations (5), on obtient, dans les trois cas, la même équation du second degré

$$\lambda^2 = \alpha^2u^2 + \beta^2v^2 + \gamma^2w^2 - 2\gamma\alpha uw - 2\beta\gamma vw - 2\alpha\beta uv.$$

4° Les asymptotes de la cubique (C) ont pour équations respectives

$$\left.\begin{array}{l} y = -\dfrac{\beta}{3} \\ z = \dfrac{\gamma}{3} \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} z = -\dfrac{\gamma}{3} \\ x = \dfrac{\alpha}{3} \end{array}\right\}, \qquad \left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{\alpha}{3} \\ y = \dfrac{\beta}{3} \end{array}\right\}.$$

Elles sont donc homothétiques à celles de la première cubique par rapport à l'origine, le rapport d'homothétie étant $-\frac{1}{3}$. En partant de la cubique (C), on trouvera donc une troisième cubique $(C_1)$, homothétique de la deuxième, le rapport d'homothétie étant encore $-\frac{1}{3}$, et ainsi de suite indéfiniment.

Les équations de la cubique $(C_1)$ seront

$$yz + \frac{\beta z}{3^2} - \frac{\gamma y}{3^2} + \frac{\beta\gamma}{3^3} = 0,$$

$$zx + \frac{\gamma x}{3^2} - \frac{\alpha z}{3^2} + \frac{\alpha\gamma}{3^3} = 0,$$

$$xy + \frac{\alpha y}{3^2} - \frac{\beta x}{3^2} + \frac{\alpha\beta}{3^3} = 0;$$

celles de la $n^{ième}$ seront de même

$$yz + (-1)^{n-1}\left[\frac{\beta z}{3^{n-1}} - \frac{\gamma y}{3^{n-1}}\right] + \frac{\beta\gamma}{3^n} = 0,$$

$$zx + (-1)^{n-1}\left[\frac{\gamma x}{3^{n-1}} - \frac{\alpha z}{3^{n-1}}\right] + \frac{\alpha\gamma}{3^n} = 0,$$

$$xy + (-1)^{n-1}\left[\frac{\alpha y}{3^{n-1}} - \frac{\beta x}{3^{n-1}}\right] + \frac{\alpha\beta}{3^n} = 0.$$

La limite de cette cubique, lorsque $n$ croît indéfiniment, est donc

$$yz = 0, \qquad zx = 0, \qquad xy = 0,$$

c'est-à-dire le système des axes de coordonnées.

**5°** Si le plan Q tourne autour d'une droite, entre $u$, $v$, $w$ on a une relation linéaire

$$lu + mv + pw = 0.$$

Par suite, la droite D décrit la quadrique

$$l\mathrm{U} + m\mathrm{V} + n\mathrm{W} = 0,$$

en désignant par U, V, W les premiers membres respectifs des équations (5).

**6°** Plus généralement, si le plan Q varie en restant tangent à un cône de la $n^{ième}$ classe, entre $u$, $v$, $w$ on aura une relation

$$f(u, v, w) = 0,$$

homogène et de degré $n$. Les droites D engendreront donc la surface représentée par l'équation

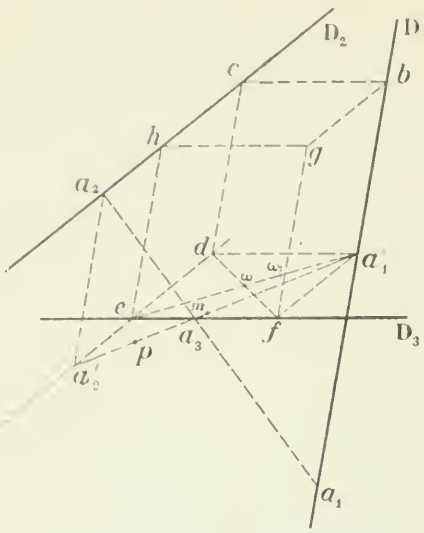
$$f(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}) = 0.$$

Cette surface est d'ordre $2n$ ; elle passe par la cubique (C), et celle-ci est une courbe multiple d'ordre $n$ de la surface.

*Observation.* — Nous avons cru bon, en développant la solution de cette question, de rectifier l'erreur provenant de ce que l'on a mis le plan P à la place du plan Q dans la cinquième et dans la sixième partie du problème, tel qu'il a été énoncé dans le numéro de novembre. Au reste la solution de ces deux parties du problème telles qu'elles sont énoncées dans le texte primitif n'offre aucune difficulté : il n'y a qu'à se reporter aux équations (4) pour s'en assurer.

*Remarques géométriques.* — Soient $D_1$, $D_2$, $D_3$ les asymptotes de la cubique donnée. Il existe un hyperboloïde à une nappe et un seul contenant ces trois droites. Considérons les deux plans tangents à cet hyperboloïde parallèle au plan Q. Dans ces deux plans se trouvent deux génératrices $a_1a_2a_3$, $b_1b_2b_3$ rencontrant $D_1$, $D_2$, $D_3$. Les points $a$ et $b$, centres des moyennes distances de $a_1$, $a_2$, $a_3$ et de $b_1$, $b_2$, $b_3$ respectivement, appartiennent à la droite D. Or, quand $a_1a_2a_3$ et $b_1b_2b_3$ se déplacent sur l'hyperboloïde, les points $a$ et $b$ décrivent, sur cette surface, une courbe (Γ), et toutes les droites D rencontrent cette courbe en deux points. Cherchons la nature de cette courbe (Γ), c'est-à-dire le lieu des centres des moyennes distances des points de rencontre de $D_1$, $D_2$, $D_3$ avec toutes les génératrices de l'hyperboloïde de système différent de celui auquel appartiennent $D_1$, $D_2$, $D_3$.

Pour cela, considérons le parallélipipède dont $D_1$, $D_2$, $D_3$ sont trois arêtes. Soit $a'_1bcdefgh$ ce parallélipipède. Projetons sur le plan $a'_1def$ parallèlement à $D_1$. Si $a'_2$ est la projection de $a_2$, un point du lieu est projeté en un point $m$ tel que $a'_1m = \frac{a'_1a_3+a'_1a'_2}{3}$. Or, on sait que le lieu du point $p$, milieu de $a_3a'_2$, quand $a'_1a_3a'_2$ tourne autour du point $a'_1$, est une hyperbole ayant pour asymptotes les parallèles à $cd$ et à $ef$ menées par le point $\omega$ milieu de $a'_1e$. D'autre part $\frac{a'_1m}{a'_1p} = \frac{2}{3}$; donc le lieu du point $m$ est une hyperbole homothétique passant par $a'_1$, comme la première, et dont les asymptotes sont les parallèles à $cd$ et à $ef$ menées par le point $\omega_1$ tel que $a'_1\omega_1 = \frac{ae}{3}$. Soient H cette hyperbole et $H_1$ l'hyperboloïde qui passe par $D_1$, $D_2$, $D_3$. La courbe (Γ) est l'intersection de l'hyperboloïde $H_1$ et du cylindre passant par H et par $D_1$. La courbe (Γ) est donc une cubique gauche dont deux asymptotes sont situées dans les plans parallèles à $abcd$ menés par le point $\omega$.




En projetant de même sur les autres faces du parallélipipède, on voit que les asymptotes de la cubique (Γ) sont situées sur un parallélipipède de même centre que le premier, homothétique au premier avec le rapport d'homothétie $\frac{1}{3}$. Ces asymptotes sont homothétiques à $D_1$, $D_2$, $D_3$ par rapport au même centre et avec le rapport d'homothétie $-\frac{1}{3}$. La cubique (Γ) n'est donc autre chose que la cubique (C) de l'énoncé. D'ailleurs chaque droite D rencontre cette cubique en deux points. De plus par tout point non situé sur la cubique on peut mener une droite et une seule rencontrant cette courbe en deux points et, quand le point est sur la cubique, le nombre de ces droites est infini, puisque ce sont alors des génératrices d'un cône du deuxième degré ayant pour directrice la cubique.

On conclut facilement de ces remarques la solution géométrique des quatre premières parties de la question.

**375.** — *Etant donnés un triangle* ABC *et une droite qui rencontre ses côtés aux points* A′, B′, C′, *on prend les points* $a$, $b$, $c$ *respectivement conjugués de* A′, B′, C′ *par rapport à* B *et* C, C *et* A, A *et* B. *On sait alors que les droites* $Aa$, $Bb$, $Cc$ *se coupent en un point* $g$ *qui est appelé le pôle de la droite* A′B′C′ *par rapport au triangle* ABC. *Lorsque la droite* A′B′C′ *est à l'infini, le point* $g$ *devient le centre de gravité du triangle* ABC.

*En partant de ces considérations, généraliser les résultats du problème précédent.*

Cette question n'est qu'une généralisation de la première. On l'en déduit par une transformation homographique, et on conclut :

1° Que si l'on coupe une cubique par des plans passant par une droite, le lieu du pôle de cette droite par rapport au triangle des points d'intersection est une autre droite. A chaque droite de l'espace on en fait ainsi correspondre une autre. On voit immédiatement que ces deux droites sont réciproques ;

2° Que si l'une des droites décrit un plan, l'autre varie en rencontrant en deux points une cubique fixe ;

3° Que si l'une des droites reste dans un plan fixe et passe par un point fixe de ce plan, l'autre décrit une quadrique passant par la cubique précédente ;

4° Que, en général, si l'une des droites enveloppe, dans le plan, une courbe de la $n^{ième}$ classe, l'autre décrit une surface d'ordre $2n$ passant par la cubique précédente qui est, pour la surface, une courbe d'ordre $n$.

X. Antomari.

---

**381.** — *Démontrer que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un quadrilatère inscrit dans une conique* S *et circonscrit à une conique* S′ *est qu'en annulant le discriminant de* $S+\lambda S'$ *on obtienne une équation en* $\lambda$ *dans laquelle une racine soit égale à la somme des deux autres.*

*Cas particulier où les coniques sont des cercles.*

Si l'on effectue une transformation homographique quelconque, on sait que les racines de l'équation en $\lambda$ varient proportionnellement; par conséquent toute relation homogène entre les racines n'est pas modifiée.

1° *La condition est nécessaire.* — Imaginons un quadrilatère ABCD circonscrit à S′ et inscrit dans S; soient E et F les points de concours des côtés opposés; projetons EF à l'infini et S suivant un cercle; ABCD devient un rectangle, et S est le cercle orthoptique de S′. Les équations des deux courbes peuvent s'écrire

$$S' = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0,$$

$$S = x^2 + y^2 - (A + B) = 0.$$

Les racines de l'équation en $\lambda$ sont $-A, -B, -(A+B)$; l'une d'elles est égale à la somme des deux autres.

2° *La condition est suffisante.* — Supposons qu'on ait entre les racines de l'équation en $\lambda$ la relation

$$\lambda_1 = \lambda_2 + \lambda_3.$$

Les deux coniques ont un triangle autopolaire commun dont les sommets correspondent aux racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$; soit O le sommet relatif à $\lambda_1$; projetons S suivant un cercle ayant son centre au point transformé de O, les équations des deux coniques s'écriront

$$S' = \frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} - 1 = 0,$$

$$S = x^2 + y^2 - C = 0.$$

Or on a $\lambda_1 = -C$, $\lambda_2 = -A$, $\lambda_3 = -B$; on en conclut $C = A + B$, ce qui montre qu'il existe une infinité de rectangles inscrits dans S et circonscrits à S′.

**Applications.** — 1° Considérons deux cercles

$$S = x^2 + y^2 - R^2 = 0,$$

$$S' = (x - d)^2 + y^2 - R'^2 = 0.$$

$$S + \lambda S' = (1 + \lambda)x^2 + (1 + \lambda)y^2 - 2\lambda dx - R^2 + \lambda(d^2 - R'^2) = 0.$$

L'équation en $\lambda$ est

$$\Delta(\lambda) = (\lambda + 1)[-\lambda^2 R'^2 + \lambda(d^2 - R^2 - R'^2) - R^2] = 0.$$

Deux cas peuvent se présenter :

(a) ou bien la racine $-1$ est égale à la somme des deux autres racines,

$$-1 = \frac{d^2 - R^2 - R'^2}{R'^2},$$

ce qui donne $d = R$. Dans ce cas le centre du cercle S′ est sur le cercle S;

(b) ou bien $-1$ est égale à la différence des deux autres racines; on obtient dans ce cas la relation

$$(R^2 - d^2)^2 = 2R'^2(R^2 + d^2).$$

2° Soit une ellipse S′ et un cercle S ayant pour centre l'un des foyers de l'ellipse et pour rayon $\sqrt{2(a^2 + c^2)}$. Nous allons démontrer qu'il existe une infinité de quadrilatères inscrits dans le cercle et circonscrits à l'ellipse. (*École Normale*, 1885.)

$$S' = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$$S = (x - c)^2 + y^2 - (2a^2 + c^2) = 0,$$

$$S + \lambda S' = x^2\left(1 + \frac{\lambda}{a^2}\right) + y^2\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right) - 2cx - (2a^2 + c^2) = 0.$$

L'équation en $\lambda$ est

$$\Delta(\lambda) = -\left(1 + \frac{\lambda}{b^2}\right)[\lambda^2 + \lambda(3a^2 + c^2) + 2a^2(a^2 + c^2)] = 0.$$

On vérifiera aisément que $-b^2$ est égale à la différence des racines du trinome entre crochets.

R. ESCOT, à Labastide-sur-Lhers.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**398.** — D'un point M pris sur un paraboloïde on mène les quatre normales MA, MB, MC, MD, autres que celle qui a son pied en M. On demande, lorsque le point M décrit le paraboloïde, de trouver :

1° Le lieu du centre de la sphère $\Sigma$ qui passe aux quatre points A, B, C, D ;

2° Le lieu du centre de la sphère $\Sigma'$, circonscrite au tétraèdre formé par les plans tangents en A, B, C, D ;

3° Montrer, dans les mêmes conditions, que le milieu du segment formé par les centres des sphères $\Sigma$ et $\Sigma'$ est fixe.

VASNIER, lycée de Versailles.

**399.** — On considère un cercle (C) de rayon $an$, et sur ce cercle une origine d'arcs, A, et un sens positif; on prend sur le cercle (C) un point M et un point M′ tel que arc $AM' = \frac{1}{3}$ arc AM. On demande :

1° De déterminer les points M′ par l'intersection du cercle et d'une hyperbole équilatère H, ayant l'un de ses axes parallèle au diamètre qui passe en A ;

2° De dire quels sont les points de rencontre du cercle et de l'hyperbole.

Cela fait, on fait varier l'arc AM et on demande alors :

3° De trouver le lieu du centre de l'hyperbole H, et le lieu des centres des coniques singulières qui passent par les points de rencontre de (C) et de H ;

4° De former l'équation de l'enveloppe de ces coniques singulières et de construire cette courbe ;

5° De trouver le lieu des sommets de H ;

6° De déterminer l'enveloppe de la droite $\omega$M, qui joint le centre de H au point M, et de construire cette courbe ainsi que les précédentes.

COLLARD.

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE CENTRALE (Concours de 1894. — 2e session).

**368.** — *On donne deux axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$, un point M situé dans l'angle $xOy$, dont les coordonnées sont $a$ et $b$, un point P situé sur l'axe des $y$ dont l'ordonnée est $p$. Par le point P on mène dans le plan des axes, une droite quelconque PR, et, à cette droite PR, on fait correspondre la conique $\Delta$ qui passe par le point M, qui a un foyer en O, et pour laquelle la droite PR est la directrice qui correspond au point O.*

1° *Déterminer géométriquement dans quelle région du plan doit être située la droite PR pour que la conique $\Delta$ qui lui correspond soit une ellipse, ou pour qu'elle soit une hyperbole.*

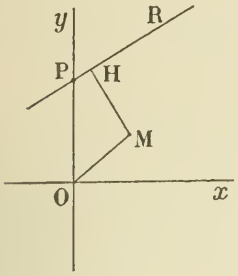
*Discuter le problème en laissant fixe le point M et en déplaçant le point P sur l'axe des $y$.*

2° *Former l'équation du lieu décrit par le centre de la conique $\Delta$ quand la droite PR tourne autour du point P. Le lieu se compose d'une droite et d'une conique C. Suivre les transformations de la conique C quand, le point M restant fixe, le point P se déplace sur l'axe des $y$.*

*Expliquer géométriquement les résultats trouvés par l'analyse.*

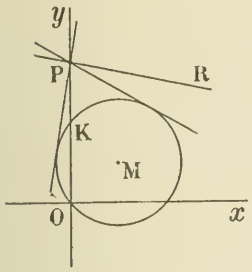
3° *Démontrer que la conique C est doublement tangente au cercle décrit sur OP comme diamètre et reconnaître si cette conique pénètre, ou ne pénètre pas dans ce cercle. Démontrer que si, laissant fixe le point P, on déplace le point M, un des deux axes de la conique C passe toujours par le milieu I de OP, et trouver sur quelle ligne il faut, dans ces conditions, placer le point M pour que l'autre axe de la conique C passe aussi par le milieu de OP.*

Traçons la droite MO et du point M abaissons la perpendiculaire MH sur la droite PR. Soit H le pied de cette perpendiculaire.



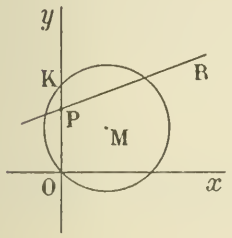

1° Puisque la conique $\Delta$ a pour foyer le point O et pour directrice correspondante la droite PR, puisqu'en outre, elle passe par le point M, son excentricité est $\frac{MO}{MH}$. Il résulte de là que la conique $\Delta$ est du genre ellipse, du genre parabole ou du genre hyperbole selon que MH est supérieur, égal ou inférieur à MO et par conséquent, si l'on trace le cercle de centre M et de rayon MO, suivant que PR ne rencontre pas, touche ou coupe ce cercle.

Désignons alors par K le second point d'intersection du cercle MO avec l'axe des $y$ et remarquons que le point P peut être extérieur à la portion de droite OK, compris entre O et K ou enfin en l'un de ces deux points.

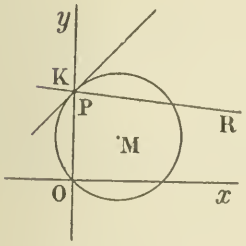



Lorsque le point P est extérieur à la portion de droite OK, il est possible de mener du point P deux tangentes au cercle MO. La droite PR, qui se place dans deux des angles formés par ces tangentes ou qui coïncide avec l'une de ces droites, peut donc ne pas rencontrer le cercle, le toucher ou le couper et par conséquent, la conique $\Delta$ est, selon les cas, du genre ellipse, du genre parabole ou du genre hyperbole.

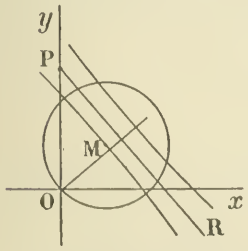
Lorsque le point P est compris entre O et K, la droite PR coupe toujours le cercle ; la conique $\Delta$ est toujours du genre hyperbole.




Enfin lorsque le point P est en K ou en O, en général la droite PR coupe le cercle et la conique $\Delta$ est du genre hyperbole. Il y a exception quand la droite PR coïncide avec la tangente au cercle en P; la conique $\Delta$ est alors du genre parabole. Observons que si le point P est en O, la directrice PR passant par le foyer O, la conique $\Delta$ ne peut pas être une hyperbole ou une parabole véritables.




Remarque I. — Supposons que la droite PR soit très voisine de la droite PM. MH est très petit; la conique $\Delta$ est une hyperbole dont les deux branches sont très voisines de PR, et quand PR vient coïncider avec PM, les deux branches de l'hyperbole viennent se confondre avec PM. Donc, dans ce cas particulier, la conique $\Delta$ se compose de la droite double PM.




2° Représentons par $\mu$ le coefficient angulaire de la droite PR. L'équation de cette droite est

$$y - p - \mu x = 0. \qquad (1)$$

Celle de la conique $\Delta$ est alors de la forme

$$x^2 + y^2 - \lambda^2(y - p - \mu x)^2 = 0,$$

en désignant par $\lambda$ un nouveau paramètre variable. Or, la conique $\Delta$ est assujettie à passer par le point M; on doit donc avoir l'équation de condition

$$a^2 + b^2 - \lambda^2(b - p - \mu a)^2 = 0,$$

qui détermine $\lambda$. Il suit de là que l'équation de la conique $\Delta$ est

$$(b - p - \mu a)^2(x^2 + y^2) - (a^2 + b^2)(y - p - \mu x)^2 = 0. \qquad (2)$$

Observons que si la droite PR passe en M, on a

$$b - p - \mu a = 0, \qquad \text{d'où} \qquad \mu = \frac{b - p}{a}$$

et l'équation (2) devient

$$\left((y - p - \frac{b - p}{a} x\right)^2 = 0.$$

La conique $\Delta$ se réduit bien, comme nous l'avons dit dans la remarque précédente, à la droite double PM.

Ceci posé, cherchons le lieu du centre de cette conique quand la droite PR tourne autour du point P.

Les équations qui déterminent ce centre étant

$$\begin{aligned}(b-p-\mu a)^2x+(a^2+b^2)(y-p-\mu x)&=0,\\(b-p-\mu a)^2y-(a^2+b^2)(y-p-\mu x)&=0,\end{aligned}\qquad(3)$$

leur forme conduit à examiner tout d'abord le cas particulier où PR se confond avec PM. On a dans ce cas

$$b-p-\mu a=0,\qquad \text{d'où}\qquad \mu=\frac{b-p}{a}$$

et les équations (3) se réduisent à une seule,

$$y-p-\frac{b-p}{a}x=0,$$

qui représente la droite PM. Cette droite fait donc partie du lieu. D'ailleurs cela devait être, car nous savons que dans cette hypothèse, la conique $\Delta$ se réduit à la droite double PM. Tous les points de cette droite sont des centres.

Cherchons maintenant l'autre partie du lieu.

Nous en obtiendrons l'équation en éliminant le paramètre variable $\mu$ entre les équations (3), et nous plaçant dans l'hypothèse $(b-p-\mu a)\neq 0$. Dans cette hypothèse, on déduit des équations (3), après avoir fait passer les seconds termes dans les seconds membres et avoir divisé membre à membre, la relation

$$\frac{x}{y}=-\mu.$$

Il suffit donc de remplacer $\mu$ par $-\frac{x}{y}$ dans l'une de ces équations. Je remplace dans la seconde et je trouve pour équation de la seconde partie du lieu

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2-py)-(ax+(b-p)y)^2=0.\qquad(4)$$

Cette seconde partie est donc une certaine conique C.

Remarque II. — L'équation $\frac{x}{y}=-\mu$, qui équivaut à $y=-\frac{1}{\mu}x$, représente la perpendiculaire OD abaissée du point O sur la droite PR. C'est l'axe focal de la conique $\Delta$ et par conséquent une droite qui passe par le centre de cette conique. On conçoit facilement alors que nous ayons trouvé cette droite dans le calcul précédent.

Etudions, comme le demande l'énoncé, les transformations de cette conique quand, le point M restant fixe, le point P se déplace sur l'axe des $y$.

Pour cela, formons la quantité $AC-B^2$. On trouve

$$b^2(a^2+b^2-(b-p)^2)-a^2(b-p)^2$$

ou

$$(a^2+b^2)p(2b-p).$$

Cette quantité est donc du signe de $p(2b-p)$. L'ordonnée du point K étant évidemment $2b$, on voit par là que si le point P est à l'extérieur de la portion de droite OK, la conique C est du genre hyperbole ; elle est du genre ellipse, quand le point P est compris entre O et K, enfin du genre parabole quand le point P est en K ou en O. Dans ce dernier cas, la conique C devient la droite double OM d'équation

$$(bx-ay)^2=0.$$

Ces résultats peuvent s'expliquer géométriquement. Rappelons-nous (Remarque II) que le centre de la conique $\Delta$ se trouve sur la droite OD, $y=-\frac{1}{\mu}x$, et déplaçons le point P sur l'axe des $y$.

Lorsque le point P est extérieur à la portion de droite OK, il existe, nous le savons, deux positions de la droite PR pour lesquelles la conique $\Delta$ est une parabole. Il y a donc deux positions de la

droite OD qui donnent un centre à l'infini. La conique C a alors deux directions asymptotiques; c'est donc une hyperbole.

Lorsque le point P est compris entre O et K, la conique $\Delta$ est toujours du genre hyperbole. Son centre n'est jamais rejeté à l'infini. La conique C n'a pas de direction asymptotique ; c'est donc une ellipse.

Lorsque le point P est en K, la conique $\Delta$ est une hyperbole, sauf dans le cas où la droite PR coïncide avec la tangente au centre MO en K, auquel cas cette conique est une parabole. Il y a donc une seule direction de la droite OD qui donne un centre à l'infini. La conique C a une seule direction asymptotique ; c'est une parabole.

Enfin, lorsque le point P est en O, on sait que la conique $\Delta$ se compose de deux droites qui se coupent en O, excepté dans le cas où la droite PR est la tangente au centre MO en O. Alors la conique $\Delta$ se réduit à la droite double OM ; il en est donc de même de la conique C.

3° Puisque l'équation de la conique C est

$$(a^2+b^2)(x^2+y^2-py)-(ax+(b-p)y)^2=0,$$

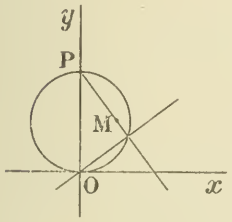
il est évident que cette conique est bitangente au cercle représenté par l'équation

$$x^2+y^2-py=0,$$

c'est-à-dire au centre décrit sur OP comme diamètre.

La corde des contacts a pour équation

$$ax+(b-p)y=0;$$




c'est la perpendiculaire à la droite PM issue de l'origine. Observons que la conique C est nécessairement tangente à $Ox$ en O, ce que l'on vérifierait aisément.

On nous demande maintenant de reconnaître si la conique C pénètre ou ne pénètre pas dans le cercle OP.

Pour le voir, nous chercherons l'ordonnée $\overline{OQ}$ du second point d'intersection de la conique C avec l'axe des $y$. Si $\overline{OQ}$ est compris entre O et $p$, la conique C pénètre dans le cercle OP ; elle n'y pénètre pas dans le cas contraire.

En faisant $x=0$ dans l'équation (4), on trouve facilement

$$\overline{OQ}=\frac{p(a^2+b^2)}{a^2+b^2-(b-p)^2}.$$

Comparons alors $\overline{OQ}$ à 0 et à $p$.

On a évidemment $\overline{OQ}\gtrless 0$, si l'on a $\dfrac{p}{a^2+b^2-(b-p)^2}\gtrless 0$, avec correspondance des signes.

De même, on a $\overline{OQ}\gtrless p$

si l'on a
$$\frac{p(a^2+b^2)}{a^2+b^2-(b-p)^2}\gtrless p$$

ou
$$\frac{p(a^2+b^2)-p(a^2+b^2)+p(b-p)^2}{a^2+b^2-(b-p)^2}\gtrless 0$$

ou enfin
$$\frac{p}{a^2+b^2-(b-p)^2}\gtrless 0,$$

toujours avec correspondance des signes.

En rapprochant ces résultats, on voit que OQ est simultanément supérieur à 0 et à $p$ ou simultanément inférieur à ces deux nombres. $\overline{OQ}$ n'est donc jamais compris entre 0 et $p$ ; la conique C ne pénètre jamais dans le cercle OP.

Traitons maintenant la dernière partie de la troisième question.

Puisque la conique C est bitangente au cercle OP, la perpendiculaire à la corde des contacts en son milieu est nécessairement un axe de la conique C. Comme cette perpendiculaire est évidemment un diamètre du cercle OP, elle passe par le milieu I de OP ; ce qu'il fallait démontrer.

Il ne nous reste plus qu'à chercher sur quelle ligne doit se placer le point M pour que l'autre axe passe aussi par le point I. Cela revient à faire en sorte que le centre de la conique C soit en I, ou encore que les équations

$$(a^2 + b^2)[x - a[ax + (b - p)y] = 0,$$
$$(a^2 + b^2)(2y - p) - (b - p)[ax + (b - p)y] = 0$$

qui déterminent ce centre, soient satisfaites par les coordonnées du point I, 0 et $\frac{p}{2}$.

On trouve les deux conditions

$$-a\frac{p}{2}(b - p) = 0,$$

$$-(b - p)^2\frac{p}{2} = 0,$$

qui se réduisent à la condition unique

$$b = p.$$

Ainsi, le point M doit se trouver sur la parallèle à $Ox$ menée par le point P ; ce qui d'ailleurs est évident géométriquement.

A. T.

Ont résolu cette question : MM. E. Berthelot ; H. Bounard (surveillant général au lycée de Bordeaux) ; G. Martinet (lycée de Toulouse) ; Fouché (répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan).

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**382.** — *On donne une hyperbole équilatère* H,

$$2xy - h^2 = 0.$$

*A un point* P *du plan correspond un point* P′ *conjugué du premier sur le diamètre qui y passe.*

*1° Démontrer que si l'un des points* P *ou* P′ *décrit une droite* D, *l'autre décrit une conique* C. *Démontrer que les coniques* C *correspondant aux droites* D *qui passent par un point* M *se coupent en quatre points fixes. Trouver ces points.*

*2° Dans quel cas la droite* D *est-elle tangente à la conique* C *correspondante? Trouver l'enveloppe des coniques* C *dans ce cas. Indiquer dans quel cas la droite* D *coupe la conique* C *correspondante en des points réels ou en des points imaginaires.*

*3° Trouver le lieu des sommets des coniques* C *tangentes aux droites* D *correspondantes.*

*4° Former l'équation de la droite* Δ *menée par le centre d'une conique* C *parallèlement à la droite* D *correspondante. Trouver combien il passe par un point de droites* Δ *telles que les coniques* C *soient tangentes aux droites* D. *Trouver le lieu des projections de l'origine sur les droites* Δ *réalisant cette dernière condition.*

Désignons par $\alpha$ et $\beta$ les coordonnées du point P, par $\alpha'$ et $\beta'$ celles du point P′. Le point P′ doit être situé sur le diamètre du point P et aussi sur la polaire de ce point. Il est donc à l'intersection des deux droites

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} \qquad \text{et} \qquad \alpha y + \beta x - h^2 = 0;$$

les deux nombres $\alpha'$ et $\beta'$ sont, par suite, la solution commune à ces deux équations. En multipliant les deux premiers rapports haut et bas par $\beta$ et $\alpha$, et les ajoutant, on obtient de suite

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{h^2}{2\alpha\beta};$$

par conséquent $\alpha' = \frac{h^2}{2\beta}$, $\beta' = \frac{h^2}{2\alpha}$; de même $\alpha = \frac{h^2}{2\beta'}$, $\beta = \frac{h^2}{2\alpha'}$.

**1°** Si le point D décrit une droite

$$D = ux + vy + w = 0,$$

on a $u\alpha + v\beta + w = 0$; par suite, $\frac{h^2}{2}\left(\frac{u}{\beta'} + \frac{v}{\alpha'}\right) + w = 0$ ou $2w\alpha'\beta' + (u\alpha' + v\beta')h^2 = 0$: le lieu du point D′ est donc la conique

$$C = 2wxy + h^2(ux + vy) = 0.$$

Quand la droite D passe par un point fixe $(x_0, y_0)$, les nombres $u$, $v$, $w$ vérifient la relation $ux_0 + vy_0 + w = 0$, et l'on a $w = -ux_0 - vy_0$; l'équation de la conique C est alors

$$2(ux_0 + vy_0)xy - h^2(ux + vy) = 0; \qquad (1)$$

lorsque $u$ et $v$ varient d'une façon quelconque, elle passe par les points communs aux deux coniques

$$2x_0xy - h^2x = 0 \qquad \text{et} \qquad 2y_0xy - h^2y = 0;$$

chacune d'elles se décompose en deux droites et les quatre points communs sont :

$$(O) \quad x = 0, \quad y = 0; \qquad (A) \quad x = 0, \quad x = \frac{h^2}{2y_0},$$

$$(A') \quad y = \frac{h^2}{2x_0}, \quad y = 0; \qquad (O') \quad x = \frac{h^2}{2y_0}, \quad y = \frac{h^2}{2x_0}.$$

Les deux points A et A′ sont à l'infini sur les axes; les deux autres sont à distance finie, en général.

**2°** Si l'on compare les deux équations $D = 0$ et $C = 0$, on voit facilement que la droite D coupe la conique C aux mêmes points que l'hyperbole H, c'est-à-dire que $D = 0$ est une sécante commune à C et H; car si l'on fait, dans l'équation $C = 0$, $ux + vy = -w$, on trouve l'équation $2xy - h^2 = 0$, qui se présente ainsi comme une conséquence des deux équations $C = 0$, $D = 0$. Par suite, lorsque la droite D rencontre l'hyperbole donnée H en deux points réels, il en est de même pour la conique C, et la droite D rencontre la conique C en deux points imaginaires, quand cela a lieu pour l'hyperbole H; comme cas particulier, on voit que la droite D touche les deux coniques C et H en même temps et au même point. L'enveloppe des coniques C, tangentes aux droites correspondantes, est donc l'hyperbole donnée H. Ce fait peut d'ailleurs se vérifier aisément. En effet formons une combinaison homogène des deux équations

$$C = 0, \quad D = 0: \qquad 2w^2xy - h^2(ux + vy)^2 = 0;$$

cette équation représente les deux rayons qui joignent l'origine aux points de rencontre de la droite D avec la conique C. Nous aurons donc la condition de contact en exprimant que ces deux rayons sont confondus; nous obtenons ainsi $h^4u^2v^2 - (h^2uv - w^2)^2 = 0$ ou $w^2 - 2h^2uv = 0$.

De cette relation nous tirons $v = \frac{w^2}{2h^2u}$; par suite l'équation de la conique C devient, dans ce cas,

$$2wxy + h^2ux + \frac{w^2}{2u}y = 0,$$

ou, en posant $\frac{w}{u} = \lambda$,

$$2\lambda xy + h^2x + \frac{\lambda^2 y}{2} = 0. \qquad (2)$$

Nous aurons l'enveloppe en exprimant que cette équation en $\lambda$ a une racine commune avec sa dérivée par rapport à $\lambda$, ou, plus rapidement, a une racine double. Ce procédé donne immédiatement $2xy = h^2$.

**3°** Toutes les coniques représentées par l'équation $C = 0$, et, en particulier, par l'équation (2) sont des hyperboles équilatères, ayant pour asymptotes des parallèles aux axes de coordonnées. Leurs axes sont donc des parallèles aux bissectrices de l'angle $xOy$ menées par le centre. Or les équations du centre sont $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, ou

$$2\lambda y + h^2 = 0, \qquad 2\lambda x + \frac{\lambda^2}{2} = 0;$$

il suffit de les combiner par addition et soustraction pour avoir des parallèles aux bissectrices des axes passant par le centre ; on obtient ainsi les deux axes de la conique (2)

$$2\lambda(x+y)+h^2+\frac{\lambda^2}{2}=0,$$

$$2\lambda(x-y)-h^2+\frac{\lambda^2}{2}=0.$$

Eliminons $\lambda$ entre chacune d'elles et l'équation (2) et nous aurons les lieux des sommets. Si nous considérons d'abord le système

$$2\lambda xy+h^2x+\frac{\lambda^2}{2}y=0,$$

$$2\lambda(x+y)+h^2+\frac{\lambda^2}{2}=0,$$

nous aurons de suite $\lambda$, en multipliant la seconde par $y$ et retranchant ensuite de la première, $\lambda=\frac{h^2(x-y)}{2y^2}$ ; en portant cette valeur de $\lambda$ dans la première, nous aurons l'équation du lieu

$$8x^2y^2+h^2(x-y)^2=0. \qquad (3)$$

Un calcul tout semblable donne le second lieu,

$$8x^2y^2-h^2(x+y)^2=0. \qquad (4)$$

Le lieu représenté par l'équation (3) est imaginaire ; il se décompose en deux hyperboles équilatères imaginaires : c'est évidemment le lieu des sommets imaginaires des coniques (2). Le second lieu est le lieu des sommets réels ; il se compose des deux hyperboles équilatères

$$2\sqrt{2}xy-h(x+y)=0 \qquad \text{et} \qquad 2\sqrt{2}xy+h(x+y)=0.$$

4° Le centre d'une conique C est donné par les deux équations

$$2wy+h^2u=0, \qquad 2wx+h^2v=0\,;$$

en multipliant ces équations par $v$ et $u$, et les ajoutant, on obtient la droite

$$w(ux+vy)+h^2uv=0,$$

qui passe par le centre, puisqu'elle est une combinaison des deux équations du centre, et qui est évidemment parallèle à la droite D. Portons dans l'équation de cette droite la valeur de $v$ tirée de la condition de contact, $v=\frac{w^2}{2h^2u}$, divisons par $u$ et posons $\frac{w}{u}=\lambda$, nous aurons, toutes simplifications faites,

$$x+\frac{\lambda^2y}{2h^2}+\frac{\lambda}{2}=0 \qquad \text{ou} \qquad 2h^2x+\lambda^2y+\lambda h^2=0. \qquad (5)$$

Cette équation contient $\lambda$ au second degré ; par conséquent, si nous exprimons que la droite (5) passe en un point donné $(x, y)$, l'équation correspondante donnera deux valeurs pour $\lambda$ ; il passe donc deux de ces droites par un point du plan. La quantité sous le radical est $h^4-8h^2xy$ ; les points du plan par lesquels passent deux droites réelles sont donc ceux qui vérifient l'inégalité $8xy-h^2<0$. Or l'hyperbole $8xy-h^2=0$ partage le plan en trois régions ; dans celle du centre, le premier membre est négatif ; il est positif dans les deux autres ; donc pour que les deux droites qui passent en un point soient réelles, il faut et il suffit que ce point soit dans la région du centre.

Cela posé, la perpendiculaire abaissée de l'origine sur l'une des droites (5) a pour équation $\frac{x}{2h^2}=\frac{y}{\lambda^2}$, et en éliminant $\lambda$ entre cette équation et l'équation (5), on a le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées de l'origine sur ces droites. Le calcul est aisé : on porte $\lambda^2$ dans l'équation (5) et on a de suite $\lambda$ ; on trouve ainsi

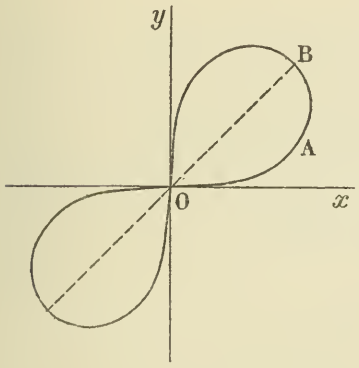
$$2(x^2+y^2)^2=h^2xy. \qquad (6)$$

Quand nous aurons construit cette courbe, la question sera complètement résolue. A cet effet, formons l'équation en coordonnées polaires, O étant le pôle, $Ox$, l'axe polaire et le sens de rotation des

angles positifs le même que dans le système précédent. Cette équation est

$$4\rho^2 = h^2 \sin 2\omega, \qquad 2\rho = h\sqrt{\sin 2\omega}.$$

Le second membre ne change pas quand on change $\omega$ en $\omega + 2\pi$; donc il suffit de faire varier $\omega$ de 0 à $2\pi$. Or si on change $\omega$ en $\pi + \omega$, $2\rho$ ne change pas; donc quand $\omega$ ira de $\pi$ à $2\pi$, on retrouvera la portion symétrique de celle déjà décrite, par rapport au pôle; — cette symétrie se manifeste d'ailleurs autrement : par le double signe du radical. — Il suffira par conséquent de faire varier $\omega$ de 0 à $\pi$; or de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, $\sin 2\omega$ est négatif, $\rho$ est imaginaire; l'intervalle se restreint donc au premier quadrant. Enfin en donnant à $\omega$ deux valeurs telles que $\frac{\pi}{4} - \alpha$ et $\frac{\pi}{4} + \alpha$, l'angle $2\omega$ prend deux valeurs supplémentaires, $\rho$ prend les mêmes valeurs; il y a donc symétrie par rapport à la première bissectrice et il suffit de construire la portion de courbe qui répond aux valeurs de $\omega$ inférieures à $\frac{\pi}{4}$, et au signe $+$ du radical. Quand $\omega$ varie de 0 à $\frac{\pi}{4}$, $2\omega$ varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$, $\sin 2\omega$ augmente de 0 à 1; par suite $\rho$ augmente de 0 à $\frac{h}{2}$. On obtient donc ainsi l'arc OAB, tangent à $Ox$ en O et à une perpendiculaire à la bissectrice en B. Les symétries indiquées permettent d'achever la courbe.




Cette courbe est une lemniscate de Bernoulli.

Ont envoyé des solutions analytiques exactes : MM. Léon Bailly, lycée de Dijon; Fouché, répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan; P. Hostalot, lycée Louis-le-Grand; A. Laureaux, lycée de Besançon; Pelletreau, lycée Saint-Louis; Lucien Sueur, soldat au 113e de ligne, élève de l'école normale supérieure; G. Vergnon, à Lagarde.

**Solution géométrique.** — 1° Le point P′ est à l'intersection de la droite OP et de la polaire du point P. Si le point P décrit une droite D, sa polaire passe par le pôle A de la droite D; par conséquent les droites AP′ et OP′, qui sont également inclinées sur les asymptotes de l'hyperbole H, engendrent deux faisceaux homographiques, et le lieu du point P′ est une conique C qui passe par les points O et A.

La tangente à cette conique au point O est le rayon homologue du rayon AO; c'est donc la droite symétrique de AO par rapport aux asymptotes de H. On en conclut que la tangente en O à la conique C est parallèle à la droite D, il en est de même de la tangente au point A, et par suite le centre de la conique C est au milieu de OA. On voit de plus aisément que cette conique a des points à l'infini dans les directions des asymptotes de H, c'est donc une hyperbole équilatère ayant ses asymptotes parallèles à celles de H.

Si la droite D passe par un point fixe B, toutes les coniques C passeront par le point B′, situé sur OB et conjugué de B. On voit donc que toutes ces coniques ont quatre points fixes, les points O, B′ et les points à l'infini.

2° On voit immédiatement que la conique C passe par les points de rencontre de H et de la droite D. Cette droite sera tangente à C, si elle est tangente à H, et cette dernière hyperbole sera l'enveloppe des coniques C.

La droite D étant sécante commune à H et à C rencontrera ces deux coniques en même temps en des points réels ou en des points imaginaires.

3° Soit D une tangente à H au point M; la conique C correspondante touche H au point M, et a son centre au milieu I de OM. On en conclut que C est homothétique de H, par rapport au centre d'homothétie M, le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

Soient S et S′ les sommets de H, ceux de C seront les milieux $\sigma$ et $\sigma'$ de SM et S′M. Par conséquent, le lieu de ces points, quand M décrit l'hyperbole H, se composera de deux hyperboles homothétiques de H, les centres d'homothétie étant S et S′, et le rapport d'homothétie commun étant égal à $\frac{1}{2}$.

4° La droite $\Delta$ menée par le centre I de la conique C parallèlement à D est tangente au point I à une hyperbole H′ homothétique de H, le centre d'homothétie étant le point O, et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{1}{2}$.

Par conséquent, par un point quelconque U du plan on pourra mener deux droites Δ, qui seront les tangentes menées par le point U à la conique H′ ; ces deux tangentes ne seront réelles que si le point U est par rapport à H′ dans la même région que le point O.

Le lieu des projections du point O sur les droites Δ sera la podaire du point O par rapport à H′, c'est-à-dire une lemniscate, dont O est le point double, dont les tangentes au point double sont les asymptotes de H′ et enfin dont les sommets coïncident avec les sommets de H′.

Joseph CHEVALLIER, lycée d'Orléans.

Autres solutions géométriques par MM. Marcel Gancherv, lycée de Moulins ; Grossejambe, lycée de Douai ; Gabriel Martinet, lycée de Toulouse.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**400.** Une parabole est circonscrite à un triangle rectangle ; trouver le lieu du point de contact d'une tangente qui fait avec l'un des côtés de l'angle droit et en sens opposé le même angle que l'hypoténuse.

**401.** Une ellipse tourne autour de son centre, et, aux points où deux droites rectangulaires issues du centre la rencontrent, on lui mène des tangentes ; trouver le lieu du point de concours de ces tangentes.

**402.** On donne un cercle fixe et un diamètre AB de ce cercle ; d'un point mobile sur le cercle M, et pris pour centre, on décrit un cercle tangent au diamètre AB en P. On mène les droites MA et MB, qui coupent le cercle mobile en C et D. Trouver le lieu du point de rencontre de la droite CD avec MP.

## BIBLIOGRAPHIE

*Leçons d'Arithmétique théorique et pratique, par* Jules Tannery, *sous-directeur des études scientifiques à l'Ecole normale supérieure.* — Paris. — Armand Colin et Cie, Editeurs.

Ce traité d'Arithmétique est le premier dans lequel on ait osé introduire une complète rigueur, au moins dans les fondements de la théorie, dans la numération écrite, en particulier. Les propriétés fondamentales des opérations y sont bien mises en relief et servent de support rationnel aux opérations elles-mêmes ; celles-ci n'ont d'ailleurs pas d'autre but, comme le fait judicieusement remarquer l'auteur, que d'écrire une somme, une différence, un produit, etc., dans le système décimal. — Les nombres fractionnaires y sont introduits d'abord par l'idée de mesure de longueur, puis comme des symboles fictifs destinés à généraliser les calculs auxquels la division des entiers donne naissance ; en analyse, c'est évidemment là le vrai point de vue. Les nombres irrationnels sont introduits et étudiés avec beaucoup de soin, en se plaçant à ce dernier point de vue. L'auteur a consacré un chapitre fort intéressant à étudier la correspondance qui existe entre les nombres et les grandeurs, et a très nettement montré les conditions sous lesquelles une classe de grandeurs sont mesurables, au sens habituel du mot. Il n'a négligé aucun des problèmes qui se présentent dans l'enseignement, lorsque l'on expose aux élèves l'ensemble des théories comprises communément sous le nom générique d'*Arithmétique*. Enfin il termine son ouvrage par des compléments assez étendus sur les principes de la théorie des nombres, et démontre en particulier la *loi de réciprocité* relative aux résidus quadratiques. — Ce livre n'est pas inférieur à ce qu'on devait attendre d'un maître aussi distingué que M. Jules Tannery et rendra de grands services, non seulement aux élèves, mais encore aux professeurs, qui y trouveront plus d'une occasion de réfléchir et de modifier leurs idées.

E. H.

*Leçons de Cinématique, par* Gabriel Koenigs, *chargé d'un cours à la Sorbonne, etc.* — *Paris.* — *Librairie scientifique A. Hermann.*

J'ai eu un véritable plaisir à lire ce livre, qui débute par une magistrale théorie des segments, sur laquelle l'auteur s'appuie systématiquement. L'étude de la vitesse, de l'accélération, de la distribution des vitesses dans un corps solide en mouvement, est ainsi considérablement simplifiée. Dans l'étude du mouvement d'un corps solide, par rapport à un espace fixe, ou envisagé comme tel, l'auteur se sert d'un trièdre mobile attaché au corps solide, et parvient ainsi très simplement à toutes les propriétés concernant ce mouvement, en particulier, au théorème de Coriolis. L'usage d'un pareil trièdre, depuis l'emploi fréquent qu'en ont fait Ribaucourt et M. Darboux, est familier à tous ceux qui s'occupent de Mathématiques, et l'on doit féliciter vivement l'auteur de s'en être servi dans ses leçons de cinématique.

Je souhaite que ce rapide aperçu engage tous les candidats à la licence, à l'agrégation, et aussi tous ceux qui veulent perfectionner leurs connaissances en Mécanique, à étudier cet ouvrage véritablement bien fait. Ils auront le double avantage de s'initier à des méthodes très employées aujourd'hui en géométrie pure, et d'acquérir très facilement tout ce qu'il est réellement utile de connaître en cinématique. Ce livre a d'ailleurs un autre mérite, qui est trop rare pour que je le passe sous silence, celui d'être bien et clairement écrit.

E. H.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

5e Année. N° 7 Avril 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**353.** — *On donne une conique tangente en* B, C *aux deux côtés* AB, AC *du triangle* ABC; *deux points* P, Q *conjugués par rapport aux points* B *et* C *et un point* S.

*Autour du sommet* A *on fait pivoter la sécante* ARR′ *qui coupe la conique aux points* R, R′, *que l'on joint aux points* P, Q *de façon à déterminer le quadrilatère* PRQR′, *et l'on considère les coniques* Σ *inscrites dans ce quadrilatère pour lesquelles les tangentes issues du point* S *forment un faisceau harmonique avec les droites* SP, SQ.

1° *Démontrer que les coniques* Σ *sont inscrites dans un quadrilatère fixe.*

2° *Trouver le lieu des points* H *d'où l'on peut mener aux coniques* Σ *des tangentes formant un faisceau harmonique avec les droites* HP, HQ.

3° *Que doivent être les points* P, Q, *pour que ce lieu soit un cercle?*

4° *Trouver le lieu des points de contact des coniques* Σ *avec les côtés du quadrilatère* PRQR′.

1° Prenons pour triangle de référence le triangle APQ qui est conjugué par rapport à la conique; l'équation tangentielle de cette conique peut s'écrire

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0;$$

désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du point S.

Nous supposerons que les côtés AQ, AP, PQ ont respectivement pour équations

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad z = 0;$$

les points P, Q, A auront alors pour équations tangentielles

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

La sécante ARR′ ayant pour équation

$$y - \lambda x = 0,$$

l'équation de l'ensemble des points R et R′ est

$$(\lambda^2 + 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\lambda u - v)^2 = 0;$$

il en résulte que l'équation générale des coniques inscrites dans le quadrilatère PRQR′ est

$$(\lambda^2 + 1)(u^2 + v^2 + w^2) - (\lambda u - v)^2 + 2\mu uv = 0,$$

ou

$$u^2 + \lambda^2 v^2 + (\lambda^2 + 1)w^2 + 2(\lambda + \mu)uv = 0.$$

Si, entre cette équation et l'équation $u\alpha + v\beta + w\gamma = 0$, nous éliminons $w$, nous aurons l'équation des points de rencontre de BC avec les tangentes menées de S,

$$\gamma^2 u^2 + \lambda^2 v^2 + 2(\lambda + \mu)uv + (\lambda^2 + 1)(u\alpha + v\beta)^2 = 0;$$

ces points devant être conjugués par rapport à P et Q, le coefficient de $uv$ doit être nul.

On aura donc

$$(\lambda + \mu)\gamma^2 + (\lambda^2 + 1)\alpha\beta = 0,$$

ou, en posant $\frac{\alpha\beta}{\gamma^2} = k$,

$$\lambda + \mu = -k(\lambda^2 + 1).$$

L'équation des coniques $\Sigma$ devient donc

$$u^2 + \lambda^2 v^2 + (\lambda^2 + 1)w^2 - 2k(\lambda^2 + 1)uv = 0,$$

ou, en posant $\frac{1}{1 + \lambda^2} = m$,

$$mu^2 + (1 - m)v^2 + w^2 - 2kuv = 0.$$

Cette équation renfermant au premier degré le paramètre $m$, les coniques qu'elle représente sont inscrites dans un quadrilatère fixe.

2° Entre les coordonnées $x$, $y$, $z$ du point H on a la même relation qu'entre les coordonnées $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ du point S; on a donc les deux équations

$$(\lambda + \mu)\gamma^2 + (\lambda^2 + 1)\alpha\beta = 0,$$
$$(\lambda + \mu)z^2 + (\lambda^2 + 1)xy = 0;$$

et comme conséquence

$$\gamma^2 xy - \alpha\beta z^2 = 0,$$

ou

$$xy - kz^2 = 0.$$

Le lieu du point H est donc une conique C tangente en P et Q aux droites AP, AQ et passant par le point S.

3° Pour que ce lieu soit un cercle, il faut que les points P et Q soient équidistants de A et que le cercle tangent alors à AP en P, et à AQ en Q, passe par S. Pour déterminer les points de BC conjugués par rapport à B et C et équidistants de A, on abaisse de A la perpendiculaire AI sur BC, et on détermine P et Q par la relation

$$\overline{IP}^2 = \overline{IQ}^2 = \overline{IB} \cdot \overline{IC}.$$

4° Les points de contact d'une conique $\Sigma$ avec les côtés du quadrilatère PRQR′ sont à l'intersection de la conique avec les polaires des points P et Q.

L'équation ponctuelle des coniques $\Sigma$ s'écrit

$$f(x, y, z) = (1 - m)x^2 + my^2 + [m(1 - m) - k^2]z^2 + 2kxy = 0.$$

La polaire de P a pour équation

$$\frac{1}{2} f'_x = (1 - m)x + ky = 0;$$

en éliminant $m$ entre ces deux équations, on obtient

$$(kz^2 - xy)[k(x^2 + y^2) + xy] = 0.$$

On trouve le même lieu en prenant la polaire du point Q. On voit ainsi que le lieu se compose de la conique C, et des deux droites qui passent par le point A, et par les points communs à la conique C et à la conique donnée.

Mais on peut remarquer que l'ensemble de ces deux droites constitue une portion singulière du lieu; car si l'on prend un point $(x_0, y_0, z_0)$ sur ce lieu, on a

$$k = -\frac{x_0 y_0}{x_0^2 + y_0^2};$$

la valeur de $m$ correspondante est

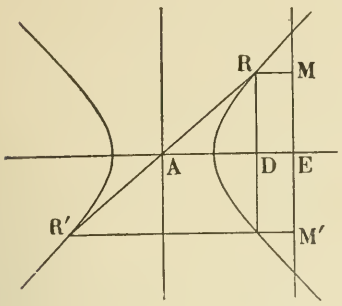
$$m = \frac{x_0 + ky_0}{x_0};$$

on vérifie aisément que l'on a

$$(1 - m)m - k^2 = 0,$$

et dans ce cas la conique $\Sigma$ se réduit à une droite double.

**Solution géométrique.** — 1° Faisons une transformation homographique telle que les points P et Q deviennent les points cycliques; la conique donnée est alors une hyperbole équilatère de centre A, et si l'on mène la sécante ARR′, les coniques $\Sigma$ auront pour foyers les points R et R′ et seront vues du point S sous un angle droit.




Considérons une ellipse ayant pour foyers R, R′; soient $a$, $b$ les demi-longueurs d'axes; la distance AS est égale à $\sqrt{a^2+b^2}$, il en résulte que cette quantité est constante. On aura donc

$$a^2+b^2=d^2.$$

Nous allons démontrer que toutes ces ellipses sont inscrites dans un rectangle fixe. Menons par exemple une tangente à l'une de ces ellipses parallèle à l'axe non transverse de l'hyperbole équilatère, nous montrerons que la distance du point A à cette tangente est constante.

Projetons les points R et R′ en M et M′ sur cette tangente; on a

$$2AE = RM + R'M'$$

$$4\overline{AE}^2 = (R'M' - RM)^2 + 4RM.R'M'.$$

Or on a

$$RM.R'M' = b^2,$$

$$R'M' - RM = 2AD;$$

on en déduit

$$\overline{AE}^2 = \overline{AD}^2 + b^2.$$

Or le point R étant sur l'hyperbole équilatère, on a

$$\overline{AD}^2 - \overline{RD}^2 = \alpha^2,$$

$\alpha$ désignant le demi-axe réel de cette courbe; on a aussi

$$\overline{AD}^2 + \overline{RD}^2 = \overline{AR}^2 = a^2 - b^2;$$

donc

$$2\overline{AD}^2 = \alpha^2 + a^2 - b^2;$$

par suite

$$\overline{AE}^2 = \frac{\alpha^2 + a^2 + b^2}{2} = \frac{\alpha^2 + \overline{AS}^2}{2};$$

AE est donc constant.

On ferait une démonstration analogue pour les tangentes à l'ellipse parallèles à l'axe réel de l'hyperbole.

2° et 3° Il faut chercher le lieu des sommets des angles droits circonscrits aux coniques $\Sigma$; c'est le cercle orthoptique de centre A et de rayon AS.

4° Le lieu demandé se réduit au lieu des points de rencontre de la conique $\Sigma$ avec ses directrices; on sait que ces points sont sur le cercle orthoptique, et comme ce cercle est le même pour toutes les coniques $\Sigma$, il constitue le lieu demandé.

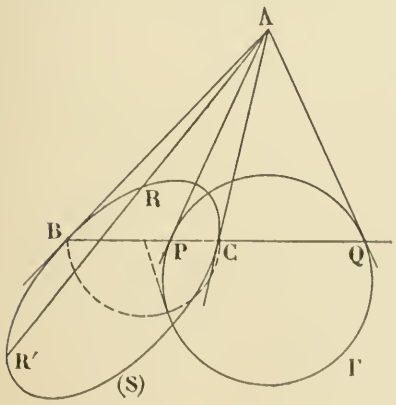
En outre, ce cercle rencontre l'hyperbole équilatère en deux couples de points diamétralement opposés, F et F′, $\varphi$ et $\varphi'$.

L'ensemble des deux points F et F′ constitue une conique $\Sigma$ singulière qu'on peut envisager aussi comme la droite double FF′. Le demi-petit axe de cette conique est nul; il en résulte que les directrices relatives aux foyers imaginaires se confondent avec la droite FF′, par suite tous les points de cette droite sont des points du lieu; il en est de même des points de la droite $\varphi\varphi'$. Le lieu se compose donc du cercle orthoptique et des droites FF′ et $\varphi\varphi'$.

VASNIER, collège Rollin.

M. J. L., à Douai, a résolu cette question.

**2e Solution géométrique.** — Toutes les coniques $\Sigma$ font partie d'un réseau tangentiel conjugué du réseau ponctuel déterminé par les trois couples de droites SP, SQ; AP, PQ; AQ, QP. Toutes les coniques de ce réseau ponctuel passent par les points P et Q, puisque trois d'entre elles y passent, et tous les couples de droites tels que HP, HQ ne sont autre chose que les coniques dégénérées du réseau ponctuel. Le lieu des points H est une courbe de troisième ordre, la Jacobienne du réseau; mais ici la droite BC faisant tout entière partie de la Jacobienne, le lieu s'abaisse en réalité au second degré. C'est donc une conique Γ qui passe par S et qui est tangente à AP et AQ en P et Q, comme on le reconnaît immédiatement en supposant, par exemple, que HP tourne autour du point P jusqu'à venir coïncider avec PQ.




De plus la conique donnée (S) est le lieu des points M tels que les tangentes menées de ces points aux coniques $\Sigma$ soient conjuguées harmoniques par rapport à MB, MC puisque ces tangentes font partie de l'involution déterminée par les deux couples de droites MR, MR′; MP, MQ.

Les points d'intersection des coniques Γ et (S) forment un qua-

drangle dont deux côtés opposés se coupent en A ; les autres couples de côtés de ce quadrangle sont tangents aux coniques $\Sigma$ ; car soit $M_1$ l'un des points de rencontre, les deux côtés du quadrangle issus de $M_1$ sont conjugués harmoniques par rapport à B, C et à P, Q. Ce sont donc les deux tangentes issues de $M_1$, puisque d'une part, $M_1$ étant sur (S), elles doivent diviser harmoniquement le segment BC, et, d'autre part, $M_1$ étant sur $\Gamma$, elles doivent diviser harmoniquement le segment PQ. Les coniques $\Sigma$ sont donc tangentes à quatre droites fixes.

Les coniques $\Gamma$, qui répondent aux divers segments PQ de la droite BC passent en S et sont toujours tangentes en P et Q aux droites AP, AQ. Pour que l'une de ces coniques soit un cercle, il faut et il suffit que P et Q soient symétriques par rapport au pied de la perpendiculaire abaissée de A sur BC et que le point S soit sur le cercle ainsi déterminé.

Enfin si nous considérons le point de contact T d'une tangente issue de P ou Q aux coniques $\Sigma$, il est évident que les droites TP, TQ sont conjuguées par rapport aux courbes $\Sigma$. Le lieu du point T est donc encore la conique $\Gamma$.

J. CLAIRIN, lycée Louis-le-Grand.

---

**379.** — *Étant donné un ellipsoïde rapporté à ses axes et dont l'équation est*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0\ :$$

1° *On coupe cet ellipsoïde par un plan* P *et l'on mène, à la surface, les normales dont les points d'incidence sont situés sur la courbe d'intersection. Prouver que le cône qui a son sommet à l'origine, et dont les génératrices sont respectivement parallèles à ces normales, est un cône du second degré ; trouver ensuite l'enveloppe des plans* P *pour lesquels ce cône est capable d'un trièdre trirectangle inscrit.*

2° *Par un point* A, *situé d'une manière quelconque dans l'espace, on mène les normales à l'ellipsoïde et dont les points d'incidence sont, comme l'on sait, sur une cubique gauche* (V). *Trouver l'équation de la surface engendrée par les sécantes doubles de cette cubique qui sont vues du centre de l'ellipsoïde sous un angle droit.*

3° *Trouver tous les plans qui coupent cette surface suivant quatre droites.*

1° Désignons par $x$, $y$, $z$ les coordonnées du point d'incidence de l'une des normales et par $P \equiv ux+vy+wz+p=0$ l'équation du plan P. Les trois nombres $x$, $y$, $z$ vérifient, par hypothèse, les deux équations

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0 \qquad \text{et} \qquad ux+vy+wz+p=0,$$

et, par suite, la combinaison suivante de ces équations, qui est homogène en $x$, $y$, $z$ :

$$p^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)-(ux+vx+wz)^2=0.$$

D'autre part, les équations de la normale à l'ellipsoïde, au point $(x, y, z)$, sont

$$\frac{a^2(X-x)}{x}=\frac{b^2(Y-y)}{y}=\frac{c^2(Z-z)}{z};$$

celles de la parallèle à cette droite menée par l'origine sont

$$\frac{a^2X}{x}=\frac{b^2Y}{y}=\frac{c^2Z}{z}.$$

Dès lors on aura le lieu de cette droite en éliminant $x$, $y$, $z$ entre ces deux équations et la relation homogène trouvée plus haut, c'est-à-dire en remplaçant, dans cette relation, les nombres $x$, $y$, $z$ par les nombres $a^2X$, $b^2Y$, $c^2Z$ qui leur sont respectivement proportionnels ; on trouve ainsi l'équation

$$p^2(a^2X^2+b^2Y^2+c^2Z^2)-(a^2uX+b^2vY+c^2wZ)^2=0, \qquad (1)$$

qui représente un cône du second degré.

Pour que ce cône soit capable d'un trièdre trirectangle inscrit, il faut que l'invariant $A + A' + A''$ soit nul, ce qui donne, dans le cas actuel,

$$a^4u^2 + b^4v^2 + c^4w^2 - (a^2 + b^2 + c^2)p^2 = 0. \qquad (2)$$

Telle est l'équation tangentielle de l'enveloppe du plan P. Son équation ponctuelle s'obtient immédiatement : il n'y a qu'à remplacer dans l'équation (2) $u$, $v$, $w$, $p$ par, $x$, $y$, $z$, 1 et les coefficients par leurs inverses. Cette substitution donne

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} - \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2} = 0. \qquad (3)$$

L'enveloppe du plan P est donc un ellipsoïde concentrique à l'ellipsoïde donné, et ayant les mêmes axes. C'est la surface polaire réciproque de la sphère de Monge, quand on prend l'ellipsoïde donné comme quadrique fondamentale. Nous ne voulons pas nous attarder à vérifier ce fait, qui découle de considérations géométriques très simples.

Considérons, en effet, le cône C, circonscrit à la surface le long de la section plane déterminée par le plan P, et désignons par S son sommet. Le cône indiqué dans l'énoncé est le cône supplémentaire de celui-ci ; il est donc aussi du second degré. D'autre part le cône considéré est capable d'un trièdre trirectangle inscrit quand le cône C est capable d'un trièdre trirectangle circonscrit, et seulement dans ce cas. Mais on sait que, dans ces conditions, le point S décrit la sphère de Monge ; le plan polaire de ce point, le plan P enveloppe alors la polaire réciproque de cette sphère par rapport à l'ellipsoïde donné.

2° On sait que les pieds des normales issues du point $A(\alpha, \beta, \gamma)$ sont sur la cubique gauche

$$x = \frac{a^2\alpha}{a^2 + \lambda}, \qquad y = \frac{b^2\beta}{b^2 + \lambda}, \qquad z = \frac{c^2\gamma}{c^2 + \lambda}. \qquad (\Gamma)$$

Nous allons chercher quels sont les plans qui déterminent dans cette courbe trois cordes vues du point O sous des angles droits. A cet effet, désignons par $P \equiv ux + vy + wz + p = 0$ l'un de ces plans, par $\lambda$ le paramètre de l'un quelconque des trois points de rencontre de ce plan avec la cubique, et par $\mu$ le paramètre de l'un d'eux, que nous supposerons distingué des deux autres. Les valeurs de $\lambda$ sont données par l'équation

$$\frac{a^2\alpha u}{a^2 + \lambda} + \frac{b^2\beta v}{b^2 + \lambda} + \frac{c^2\gamma w}{c^2 + \lambda} + p = 0,$$

et, comme $\mu$ vérifie cette équation, on a aussi

$$\frac{a^2\alpha u}{a^2 + \mu} + \frac{b^2\beta v}{b^2 + \mu} + \frac{c^2\gamma w}{c^2 + \mu} + p = 0.$$

En retranchant ces deux équations, on obtient une équation du second degré en $\lambda$, qui donne les paramètres des deux autres points,

$$\frac{a^2\alpha u}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)} + \frac{b^2\beta v}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)} + \frac{c^2\gamma w}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)} = 0.$$

D'ailleurs, la relation d'orthogonalité entre les deux rayons qui joignent l'origine au point $(\mu)$ et à l'un des points $(\lambda)$ est

$$\frac{a^4\alpha^2}{(a^2 + \lambda)(a^2 + \mu)} + \frac{b^4\beta^2}{(b^2 + \lambda)(b^2 + \mu)} + \frac{c^4\gamma^2}{(c^2 + \lambda)(c^2 + \mu)} = 0 ;$$

c'est une nouvelle équation du second degré dont les racines sont les paramètres des deux autres points ; cette équation doit donc être identique à la précédente à un facteur près, et nous montre que l'on peut prendre $u = a^2\alpha$, $v = b^2\beta$, $w = c^2\gamma$. L'équation générale des plans cherchés est alors

$$a^2\alpha x + b^2\beta y + c^2\gamma z + p = 0,$$

$p$ étant un nombre variable. On voit ainsi que les plans en question restent parallèles à un plan fixe, $\Pi = 0$.

Achevons alors de définir la corde qui passe aux deux points (λ) par un plan passant à l'origine, $lx + my + nz = 0$. Nous déterminerons $l$, $m$, $n$ par la condition que ce plan coupe la cubique en deux points, distincts de l'origine, identiques aux points (λ). Or les paramètres de ces deux points sont donnés par l'équation du second degré

$$\frac{a^2 l\alpha}{a^2+\lambda} + \frac{b^2 m\beta}{b^2+\lambda} + \frac{c^2 n\gamma}{c^2+\lambda} = 0;$$

cette équation doit être la même que l'une de celles obtenues antérieurement, la seconde, par exemple; on doit donc prendre $l$, $m$, $n$ proportionnels aux nombres $\frac{a^2\alpha}{a^2+\mu}$, $\frac{b^2\beta}{b^2+\mu}$, $\frac{c^2\gamma}{c^2+\mu}$; par suite le plan qui projette de l'origine la corde qui joint les points (λ), a pour équation

$$\frac{a^2\alpha x}{a^2+\mu} + \frac{b^2\beta y}{b^2+\mu} + \frac{c^2\gamma z}{c^2+\mu} = 0. \quad (^*)$$

Nous aurons donc le lieu en éliminant $p$ et $\mu$ entre les trois équations suivantes :

$$\left.\begin{aligned} \frac{a^4\alpha^2}{a^2+\mu} + \frac{b^4\beta^2}{b^2+\mu} + \frac{c^4\gamma^2}{c^2+\mu} + p &= 0, \\ a^2\alpha x + b^2\beta y + c^2\gamma z + p &= 0, \\ \frac{a^2\alpha x}{a^2+\mu} + \frac{b^2\beta y}{b^2+\mu} + \frac{c^2\gamma z}{c^2+\mu} &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

L'élimination de $p$ est immédiate; cela fait, il faut développer les deux équations en $\mu$, et abaisser la première au second degré; il n'y a aucune difficulté à ces calculs et l'on obtient ainsi

$$H\mu^2 + K\mu + L = 0,$$
$$M\mu^2 + N\mu + Q = 0,$$

en désignant par H, K, L, ... les fonctions linéaires que voici :

$$H \equiv a^2\alpha x + b^2\beta y + c^2\gamma z, \qquad K \equiv a^2(b^2+c^2)\alpha x + b^2(a^2+c^2)\beta y + c^2(a^2+b^2)\gamma z,$$
$$L \equiv a^2b^2c^2(\alpha x + \beta y + \gamma z), \qquad M \equiv a^4\alpha(x-\alpha) + b^4\beta(y-\beta) + c^4\gamma(z-\gamma),$$
$$N \equiv a^4(b^2+c^2)\alpha(x-\alpha) + \cdots, \qquad Q \equiv a^2b^2c^2[a^2\alpha(x-\alpha) + \cdots].$$

L'équation de la surface s'obtient alors en annulant le résultant de ces équations en $\mu$; on a ainsi

$$(HQ - ML)^2 - (HN - KM)(KQ - LN) = 0. \quad (5)$$

Le lieu est donc une surface du quatrième degré. On pourrait obtenir le cône des directions asymptotiques en développant cette équation et simplifiant les termes du quatrième degré en $x$, $y$, $z$; mais il vaut mieux procéder autrement : il vaut mieux annuler d'abord la variable d'homogénéité, $t$, puis éliminer ensuite $\mu$ entre l'équation du troisième degré que donne le système (4) et celle du second degré qu'il contient. On a de suite les deux équations qui suivent :

$$H(\mu + a^2)(\mu + b^2)(\mu + c^2) = 0,$$
$$H\mu^2 + K\mu + L = 0.$$

Le résultant est alors

$$H^2(Ha^4 - Ka^2 + L)(Hb^4 - Kb^2 + L)(Hc^4 - Kc^2 + L) = 0;$$

mais comme H est en facteur dans le résultant total obtenu, de cette façon il ne faut prendre que le produit

$$H(Ha^4 - Ka^2 + L)(Hb^4 - Kb^2 + L)(Hc^4 - Kc^2 + L) = 0.$$

(*) On peut obtenir immédiatement ce plan en remarquant qu'il est perpendiculaire à la droite Oμ, qui joint le point O au point μ.

On obtient ainsi les quatre plans $H = 0$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ ; le plan de l'infini coupe donc la surface suivant quatre droites.

3° Il résulte de la génération même de cette surface qu'elle admet pour ligne double la cubique gauche $(\Gamma)$, et qu'elle admet pour génératrices rectilignes toutes les cordes de cette cubique, qui sont vues du point O sous un angle droit, et, en plus, la droite du plan de l'infini située dans le plan $H = 0$. Elle n'admet pas d'autre droite ; car si elle en contenait une autre, D, tout plan passant par cette droite couperait la surface suivant une cubique ayant trois points doubles situés sur la courbe $(\Gamma)$ : par suite, cette cubique se composerait de trois droites, qui seraient aussi des cordes de la cubique, et qui devraient rencontrer celles qui sont situées sur la surface ; or, on sait que deux cordes d'une cubique gauche ne se rencontrent pas. Il n'y a donc que la droite signalée, en dehors des génératrices de la surface indiquée dans l'énoncé. Il n'y a par suite que les plans $H = C^{te}$ qui coupent la surface suivant quatre droites.

ESCOT, à Labastide-sur-Lhers.

Bonne solution de M. G. Martinet, à Toulouse.

---

**385.** — *On considère le folium de Descartes*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$

*et le cercle variable*

$$x^2 + y^2 - 2\lambda(x + y) = 0.$$

*Trouver le lieu des points de contact avec le cercle variable des tangentes communes au folium et au cercle et construire ce lieu.*

On trouve facilement pour l'équation du folium en coordonnées tangentielles

$$3a^4u^2v^2 - 4a^3(u^3 + v^3) + 6a^2uv - 1 = 0. \qquad (1)$$

La tangente au cercle au point $x$, $y$ est

$$(x - \lambda)X + (y - \lambda)Y - \lambda(x + y) = 0.$$

En tenant compte de $x^2 + y^2 - 2\lambda(x + y) = 0$, on a pour les coordonnées de cette tangente :

$$u = -\frac{2xy + x^2 - y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)}, \qquad v = -\frac{2xy - x^2 + y^2}{(x + y)(x^2 + y^2)}.$$

En portant dans (1) ces valeurs de $u$, $v$, on a l'équation du lieu :

$$(x+y)^4(x^2+y^2)^4 + 6a^2(x+y)^2(x^2+y^2)^2(x^4+y^4-6x^2y^2) - 16a^3xy(x+y)(x^2+y^2)(3(x^2-y^2)^2+4x^2y^2)$$
$$-3a^4(x^4+y^4-6x^2y^2)^2 = 0. \qquad (2)$$

courbe du 12e ordre ayant l'origine pour point multiple d'ordre 8, et symétrique par rapport à la première bissectrice.

Il y a à l'origine quatre tangentes doubles, les droites $y = (\pm 1 \pm \sqrt{2})x$. Il est facile de voir que ces tangentes sont *de rebroussement*. En effet, posons $y = tx$, divisons par $x$ tous les termes de l'équation du 4e degré en $x$ obtenue, et faisons tendre $x$ vers 0 ; nous aurons, en négligeant les termes en $x^2$ et $x^4$,

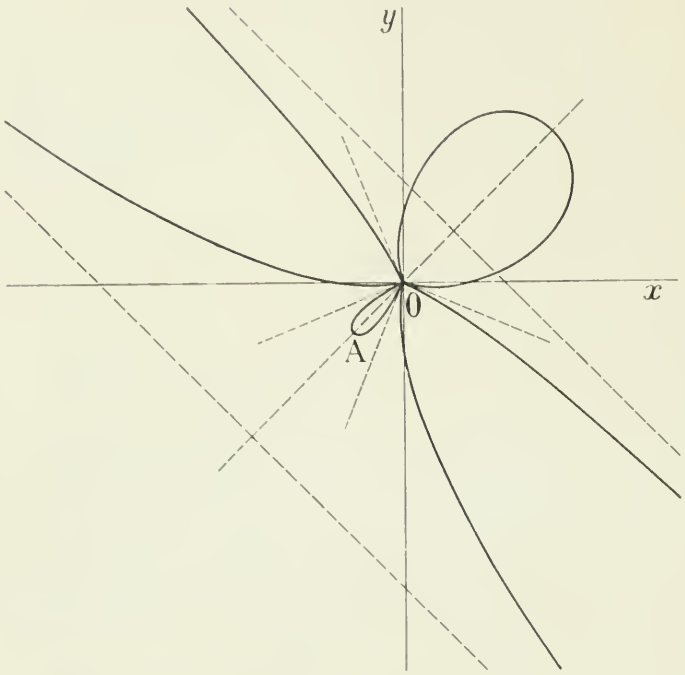
$$16a^3t(1+t)(1+t^2)(3(1-t^2)^2+4t^2)x + 3a^4(1+t^4-6t^2)^2 = 0.$$

Lorsque $x$ tend vers 0, on doit avoir

$$t(1+t)x < 0.$$

Nous pouvons donc placer la courbe par rapport à ses tangentes :

$$\text{pour} \quad \left.\begin{array}{l} t' = 1+\sqrt{2} \\ t'' = -1+\sqrt{2} \\ t''' = -1-\sqrt{2} \end{array}\right\} x < 0; \qquad \text{pour} \quad t^{\text{IV}} = +1-\sqrt{2}, \qquad x > 0.$$




L'axe des $x$ coupe la courbe aux points $x = \pm a\sqrt{2\sqrt{3}-3}$, l'axe des $y$ aux points de mêmes ordonnées. Les abscisses des points de rencontre avec la première bissectrice $x - y = 0$ sont les racines de l'équation

$$16x^4 - 24a^2x^2 - 16a^3x - 3a^4 = 0,$$

ou $$16\left(x - \frac{3a}{2}\right)\left(x + \frac{a}{2}\right)^3 = 0.$$

On voit que le point $x = y = -\frac{a}{2}$ est triple, bien qu'il ne lui corresponde qu'un arc réel. C'est la réunion d'un point simple et d'un point isolé (point A).

*Asymptotes.* $x + y = 0$ est une direction asymptotique quadruple. L'équation aux ordonnées des asymptotes est

$$d^4 - 6a^2d^2 + 8a^3d - 3a^4 = 0,$$

ou $$(d + 3a)(d - a)^3 = 0.$$

A l'asymptote $x + y = a$ ne correspondent que deux arcs de courbe réels.

Maintenant coupons la courbe par la droite $x + y = a$. A cet effet remplaçons $x + y$ par $a$ dans l'équation (2), divisons par $a^4$, et posons $\frac{y}{x} = \mu$; nous aurons

$$4\mu^8 - 48\mu^7 + 16\mu^6 - 16\mu^5 - 168\mu^4 - 16\mu^3 + 16\mu^2 - 48\mu + 4 = 0.$$

Cette équation admet deux fois la racine $-1$, qui correspond à deux nouveaux points rejetés à l'infini dans la direction $x + y = 0$; elle se réduit alors à l'équation

$$4\mu^6 - 56\mu^5 + 123\mu^4 - 207\mu^3 + 123\mu^2 - 56\mu + 4 = 0,$$

qui est réciproque et qui devient

$$4\lambda^3 - 56\lambda^2 + 111\lambda - 95 = 0,$$

en posant $\mu + \frac{1}{\mu} = \lambda$. Celle-ci n'admet qu'une racine réelle. L'asymptote ne rencontre donc la courbe qu'en deux points réels à distance finie, et, pour ceux ci, $\lambda$ et, par suite, $\mu$ est positif; les deux points sont donc dans le premier angle des axes.

Par un calcul tout semblable, on verrait que la seconde asymptote ne rencontre pas la courbe, à distance finie.

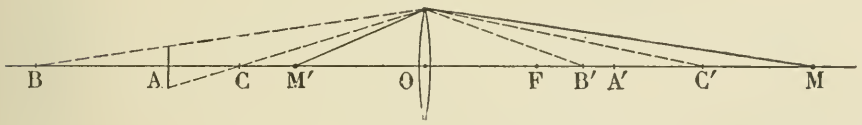
VASNIER, lycée de Versailles.

# PHYSIQUE

**386.** — *Un disque lumineux, d'éclat intrinsèque $k$ et de diamètre $a$, est placé perpendiculairement à l'axe principal d'une lentille et à une distance $p$ de cette lentille dont la distance focale est $f$ et le diamètre $b$. Calculer l'éclairement produit par les rayons réfractés sur un écran perpendiculaire à l'axe et placé à une distance quelconque, $x$, de la lentille.*

Nous appellerons S la surface de la lentille et $\Sigma$ celle du disque lumineux A.

Soit, au point M pour lequel nous cherchons l'éclairement, un élément de surface $s$ ; tous les rayons qui le rencontrent sont passés par le conjugué M′, de surface $s'$. Deux cas sont à considérer, suivant que les rayons qui passent à l'intérieur des surfaces $s'$ et S proviennent tous du disque A ou bien ne rencontrent pas tous ce disque.




Soient B et C les sommets des cônes circonscrits extérieurement et intérieurement aux cercles $\Sigma$ et S, B′ et C′ leurs conjugués. On trouve facilement, pour déterminer les positions de B′ et de C′, l'équation

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}\left(1 \mp \frac{a}{b}\right)$$

ou bien, en appelant $\omega$ la surface apparente, *supposée petite*, de la source lumineuse vue de la lentille

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} \pm \frac{2}{b}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}.$$

*Premier cas.* — Le point M est situé en dehors de l'intervalle B′C′. Toute la lumière envoyée par $\Sigma$ à $s'$ contribue à l'éclairement de $s$, et la formule de Lambert donne pour cette quantité de lumière, $y$ désignant la distance OM′,

$$q = \frac{k\Sigma s'}{(p-y)^2}.$$

L'éclairement cherché, $e_1$, est égal à $\frac{q}{s}$, et l'on a d'autre part

$$\frac{s'}{s} = \frac{y^2}{x^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{y} + \frac{1}{x} = \frac{1}{f}.$$

On en déduit

$$e_1 = k\omega \frac{f^2}{\left[x\left(1 - \frac{f}{p}\right) - f\right]^2}.$$

*Second cas.* — Le point M est situé dans l'intervalle B′C′. Les rayons qui passent à l'intérieur des surfaces $s'$ et S ne proviennent, dans ce cas, que d'une partie, $\Sigma'$, de la surface $\Sigma$ et la quantité de lumière efficace est

$$q = \frac{k\Sigma' s'}{(p-y)^2}.$$

Or $\Sigma'$ est déterminé par la proportion

$$\frac{\Sigma'}{S} = \frac{(p-y)^2}{y^2}.$$

On en déduit, pour l'éclairement cherché,

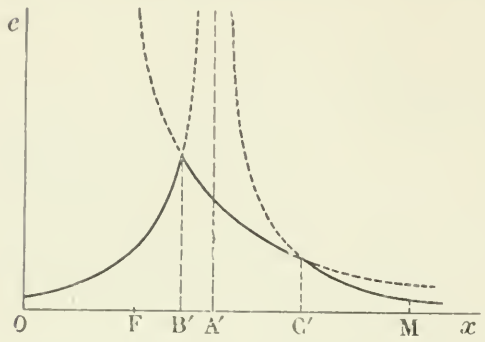
$$e_2 = k\frac{S}{x^2}.$$

Cette expression montre que l'éclairement est le même que si l'on substituait à la lentille une surface

de même éclat que la source. Elle donne, en particulier, l'éclairement que produirait sur un écran l'image A′ de la source A.

Les variations de $e_1$ et de $e_2$ sont représentées par les courbes ci-jointes, dont on a pointillé les parties inutiles.

On a supposé, dans tout ce qui précède, la lentille convergente, les distances OA et OC plus grandes que la distance focale et la distance OB positive. Le lecteur appliquera facilement aux diverses circonstances du problème la méthode indiquée.




Remarquons seulement que, si la source lumineuse est indéfinie, on est toujours dans le second cas. Ainsi, quand on regarde le ciel ou une feuille de papier blanc au travers d'une lentille, l'éclat de la lentille paraît le même que celui des parties de la source qu'on voit directement, si toutefois les pertes de lumière par réflexion sont négligeables.

*Cas du soleil.* — Considérons encore le cas où la source est très éloignée, comme, par exemple, le soleil.

Les points B′ et C′ sont déterminés par la relation

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{f} \pm \frac{2}{b}\sqrt{\frac{\omega}{\pi}}.$$

L'éclairement $e_1$ peut se mettre sous la forme remarquable

$$e_1 = k\omega',$$

$\omega'$ désignant la surface apparente de l'image du soleil vue du point M.

L'éclairement $e_2$ garde toujours la même expression.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**403.** — Par un point donné, A, on mène les normales à la surface représentée par l'équation

$$z(x^2 + y^2) = kxy,$$

en coordonnées rectangulaires.

1° Prouver que les points d'incidence de ces normales sont situés sur une conique (Γ).

2° Trouver le lieu du centre de cette conique quand on assujettit son plan à passer par un point donné B.

3° Par le centre de la conique on mène la perpendiculaire à son plan ; trouver le nombre de ces perpendiculaires qui passent par un point donné C. Quel est le lieu des points C pour lesquels deux des perpendiculaires qui y passent sont confondues ?

4° Par le point A′ symétrique du point A par rapport au plan $zOx$, on mène la perpendiculaire Δ au plan de la conique (Γ). Prouver que le produit de la plus courte distance de cette droite à l'axe des $z$, par la tangente de l'angle qu'elle fait avec cet axe, est indépendant de la position du point A. Trouver la valeur de ce produit, et trouver ensuite le lieu des droites Δ qui passent par un point, ainsi que l'enveloppe de celles de ces droites qui sont dans un plan.

X. Antomari.

**404.** Théorème à démontrer. — Si on coupe une courbe d'ordre $n$, $f(x, y) = 0$, par deux droites quelconques, $P = 0$, $Q = 0$, et si on joint respectivement les points de rencontre de la première droite avec la courbe aux points de rencontre de cette courbe avec la seconde droite, ces deux groupes de $n$ points étant rapportés l'un à l'autre d'une certaine façon, arbitraire d'ailleurs, et si l'on désigne enfin par

$$P_1 = 0, \qquad P_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad P_n = 0,$$

les équations des $n$ nouvelles droites ainsi obtenues, l'équation $f(x, y) = 0$ peut prendre la forme

$$P_1P_2 \ldots P_n + k.P.Q.g(x, y) = 0,$$

$k$ étant une certaine constante, et $g(x, y)$ une fonction entière d'ordre $n - 2$.

Énoncer géométriquement ce théorème; en déduire des théorèmes particuliers, et appliquer aux quartiques et aux cubiques.

**405.** On considère les coniques circonscrites à un parallélogramme et tangentes à une droite $\Delta$, et on demande de trouver le lieu du milieu du segment limité sur la droite $\Delta$ par les points de contact de cette droite avec les deux coniques du faisceau qui la touchent, dans les deux cas suivants :

1° Quand la droite $\Delta$ se meut parallèlement à elle-même ;

2° Quand la droite $\Delta$ passe par un point fixe.

Dans le premier cas, le lieu est une conique. Trouver le lieu des sommets de cette conique, quand la direction de $\Delta$ varie, et le lieu de ses foyers.

Dans le second cas, le lieu est une cubique à point double. Construire cette courbe. Trouver pour quelles positions du point fixe donné elle se décompose en une droite et une conique.

G. Maupin.

**406.** — Le globe terrestre étant supposé entièrement fluide, sphérique, immobile et formé de couches concentriques homogènes, évaluer la pression au centre :

1° en unités C. G. S. ;

2° en atmosphères normales.

Rayon du globe terrestre supposé sphérique : $R = 6371100$ mètres. Masse spécifique à une distance $x$ du centre, d'après la formule de Roche,

$$\mu = 10{,}6\left(1 - \frac{4}{5}\frac{x^2}{R^2}\right).$$

On supposera l'accélération due à la pesanteur à la surface partout égale à l'accélération normale 980,6.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**383.** — *On donne un cercle, deux points* A *et* B *sur ce cercle et un point* P *en dehors. Par le point* P *on mène une sécante quelconque* PCD, *puis les droites* AC *et* BD, *qui se coupent au point* M ; *trouver le lieu du point* M.

*Ce lieu est une conique; discuter la nature de cette conique, en supposant que le point* P *se déplace dans le plan.*

**Solution analytique.** — Prenons pour axe des $x$ la droite AB et pour axe des $y$ une perpendiculaire passant par le milieu du segment AB ; en désignant par $a$ l'abscisse du point A, l'équation du cercle est

$$x^2 + y^2 - 2by - a^2 = 0.$$

Une sécante quelconque passant par le point $P(\alpha, \beta)$ a pour équation

$$y - \beta - m(x - \alpha) = 0,$$

et l'équation générale des coniques qui passent par les points A et B, et par les points C et D où la sécante rencontre le cercle, est

$$f(x, y) = \lambda(x^2 + y^2 - 2by - a^2) + 2y(mx - y + \beta - m\alpha) = 0.$$

Les coordonnées d'un centre M de sécantes communes à ces coniques vérifieront les équations

$$\frac{1}{2} f'_x = \lambda x + my = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_y = \lambda(y - b) + mx - 2y + \beta - m\alpha = 0,$$

$$\frac{1}{2} f'_z = -\lambda(by + a^2) + y(\beta - m\alpha) = 0.$$

En éliminant $\lambda$ et $m$ entre ces trois équations, on aura l'équation du lieu.

Les deux dernières peuvent s'écrire

$$\lambda(y - b) + m(x - \alpha) = 2y - \beta,$$
$$\lambda(by + a^2) + m\alpha y = \beta y;$$

d'autre part, la première donne

$$\frac{\lambda}{y} = \frac{m}{-x};$$

on en déduit

$$\frac{\lambda(y - b) + m(x - \alpha)}{y(y - b) - x(x - \alpha)} = \frac{\lambda(by + a^2) + m\alpha y}{y(by + a^2) - \alpha xy},$$

ou

$$\frac{2y - \beta}{y(y - b) - x(x - \alpha)} = \frac{\beta y}{y(by + a^2) - \alpha xy},$$

ce qui s'écrit

$$y[\beta x^2 + (2b - \beta)y^2 - 2\alpha xy + 2a^2 y - a^2\beta] = 0.$$

Le lieu se compose d'une conique et de la droite AB ; en réalité cette droite a été introduite par la façon même dont nous avons résolu la question ; il est clair, en effet, que le point de rencontre de AB et de CD est un centre de sécantes communes aux coniques qui passent par les points A, B, C, D, mais ce point n'est pas un point du lieu tel qu'il a été défini.

Le lieu est donc une conique qui a pour équation

$$\beta x^2 + (2b - \beta)y^2 - 2\alpha xy + 2a^2 y - a^2\beta = 0.$$

La nature de cette conique dépend du signe de l'expression

$$\beta(2b - \beta) - \alpha^2$$

ou

$$-(\alpha^2 + \beta^2) + 2b\beta.$$

Or l'équation

$$x^2 + y^2 - 2by = 0$$

représente un cercle S concentrique au cercle donné et tangent à la droite AB ; l'expression à étudier est positive, négative ou nulle, selon que le point P est situé à l'intérieur, à l'extérieur ou sur la circonférence du cercle S.

De plus, l'équation représente deux droites si le discriminant du premier membre de l'équation est nul, c'est-à-dire si l'on a

$$\beta(\alpha^2 + \beta^2 - 2b\beta - a^2) = 0.$$

Cette condition exprime que le point P est situé ou sur la droite AB ou sur le cercle donné.

On voit donc que si le point P est situé en dehors du cercle S, le lieu est une hyperbole; dans le cas où le point P est sur le cercle donné, l'hyperbole se réduit aux droites PA et PB, et si le point P est sur AB, l'hyperbole se décompose en deux droites, dont l'une est AB.

Si le point P est sur le cercle S, le lieu est une vraie parabole, excepté si le point P est au point de contact du cercle S et de AB, c'est-à-dire à l'origine ; dans ce cas particulier, le lieu se réduit à la droite AB et à une parallèle à cette droite.

Enfin si le point P est à l'intérieur du cercle S, le lieu est une ellipse réelle, qui est un cercle dans le cas où le point P coïncide avec le centre du cercle S.

E. N. BARISIEN.

**Solution géométrique.** — Le lieu du point M peut être envisagé comme engendré par l'intersection des rayons homologues de deux faisceaux homographiques, ayant pour sommets A et B : car, à une droite AM, en

correspond évidemment une et une seule BM, telle que les points C et D où ces droites coupent le cercle soient en ligne droite avec P.

De là résulte que le lieu de M est une conique passant par A et B.

Cherchons les points à l'infini de cette conique. Le problème consiste à mener par P une sécante PC'D' telle que AC' et BD' soient parallèles ; la corde C'D' est alors égale à AB. Donc la droite PC'D' est tangente au cercle S concentrique au cercle donné et tangent à AB.

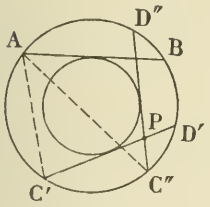
Par conséquent, pour obtenir les points du lieu à l'infini on mène par P les tangentes au cercle S, puis on joint respectivement à A et à B les points de rencontre, convenablement choisis, de ces droites avec le cercle donné.

Le lieu du point M est alors une hyperbole, une ellipse ou une parabole, suivant que P est situé à l'extérieur, à l'intérieur ou sur la circonférence du cercle S.

Remarques. — 1° La tangente en A au lieu est la droite du faisceau A qui correspond à la droite BA du faisceau B : c'est donc la droite AP. De même BP est la tangente en B au lieu.

2° Le lieu se réduit à une droite, dans le cas où la droite AB se correspond à elle-même dans les deux faisceaux ; pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que P soit sur AB.

Dans ce cas, on voit aisément que le lieu du point M est la polaire du point P par rapport au cercle donné.




3° Menons du point P les tangentes PC'D' et PC''D'' au cercle S ; l'angle aigu des asymptotes du lieu est C'AC'', il est égal à la moitié du supplément de l'angle formé par les tangentes issues du point P au cercle S.

Par suite, quand le point P est à l'infini, le lieu est une hyperbole équilatère.

P se rapprochant du centre du cercle donné, l'angle aigu des asymptotes du lieu va en diminuant ; pour tous les points P d'un cercle concentrique au cercle donné, les coniques, lieux de M, ont même angle d'asymptotes, elles sont semblables.

Dans le cas où le point P est sur le cercle donné, le lieu se réduit aux droites PA et PB.

4° Les considérations précédentes ne s'appliquent plus au cas où le point P est intérieur au cercle S, puisque le lieu est alors une ellipse. Mais on sait que le *cosinus* de l'angle des asymptotes d'une ellipse est réel ; de plus, le cosinus de l'angle des asymptotes d'une conique (hyperbole ou ellipse) varie en sens contraire de l'excentricité.

Il est naturel d'admettre que la loi de variation de ce cosinus, démontrée dans le cas où le lieu est une hyperbole, subsiste lorsque ce lieu est une ellipse.

Cette excentricité est la même pour tous les points P équidistants du cercle donné ; elle diminue en même temps que la distance de P au centre du cercle.

Elle est égale à $\sqrt{2}$ quand P est à l'infini ; elle est nulle quand P est au centre du cercle donné : le lieu de M est alors un cercle ; on s'en assure directement en remarquant que l'angle AMB est constant.

Lucien SUEUR, élève à l'école normale supérieure, soldat au 113e de ligne.

Cette question a été résolue par MM. Victor Bertrand, répétiteur au lycée de Douai ; de France, lycée de Versailles ; Pelletreau, lycée Saint-Louis ; G. Vergnon, à Lagarde ; L. Bailly, lycée de Dijon ; Louis Chomard, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

---

**387.** — *Lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse a une longueur constante et parcourt une droite donnée, tandis que l'un des côtés de l'angle droit tourne autour d'un point fixe.*

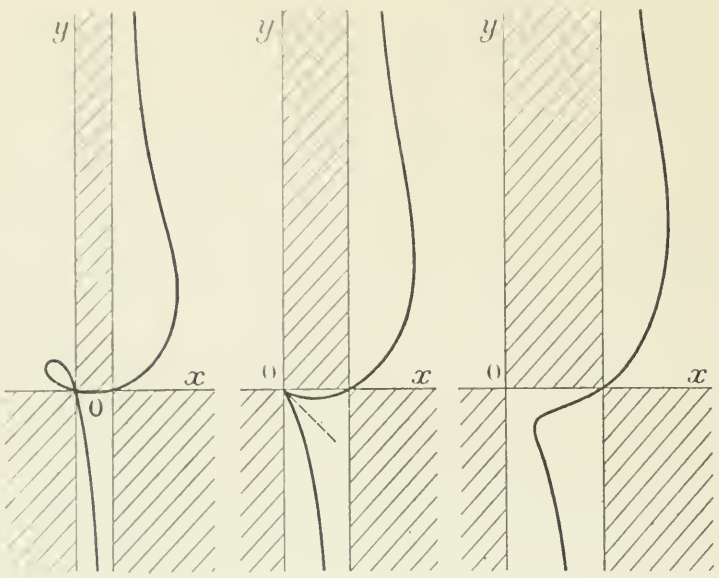
Prenons deux axes rectangulaires passant par le point fixe O, l'axe des $y$ étant parallèle à la droite $\Delta$ ; pour construire un triangle rectangle répondant à la question, on mène par le point O une droite quelconque rencontrant $\Delta$ en un point A, on prend sur cette droite une longueur AB égale à la longueur donnée, puis du point B on abaisse une perpendiculaire sur OA, le pied de cette perpendiculaire est un point M du lieu.

On peut porter la longueur donnée sur la droite $\Delta$ dans un sens ou dans l'autre, les lieux géométriques obtenus dans l'un et l'autre cas seront symétriques par rapport à $Ox$, il suffira d'étudier l'un d'eux.

Soient $a$ l'abscisse de $\Delta$ et $h$ la longueur de l'hypoténuse ; la droite OA a pour équation

$$y - mx = 0 ;$$

le point B a pour ordonnée $ma + b$, et la perpendiculaire menée de ce point à OA est représentée par l'équation




$$y - ma - b = -\frac{1}{m}(x - a).$$

En éliminant $m$ entre ces deux équations, on a l'équation du lieu. On trouve aisément

$$x(x^2 + y^2) - a(x^2 + y^2) - bxy = 0,$$

équation qui représente une cubique circulaire qui a un point double à l'origine.

En supposant $a$ et $b$ positifs, le point double sera réel et à tangentes distinctes si $b > 2a$; si $b = 2a$, on a un point de rebroussement; enfin si $b < 2a$, le point double est isolé.

La droite $\Delta$ est asymptote, et en écrivant l'équation du lieu sous la forme

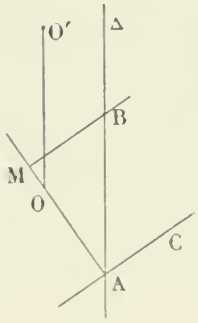
$$(x - a)(x^2 + y^2) - bxy = 0,$$

on a aisément la position de la courbe par rapport à cette asymptote.

On construira la courbe en posant $y = tx$, et on obtiendra les formes ci-contre.

Pierre SABOT, pensionnat de Valbenoite, à Saint-Etienne.

**Solution géométrique.** — La droite menée par le point A perpendiculairement à OA enveloppe une parabole P ayant le point O pour foyer et la droite $\Delta$ pour tangente au sommet; par conséquent la droite BM enveloppe aussi une parabole P′ obtenue en imprimant à la parabole P une translation égale et parallèle à AB. La parabole P′ aura donc pour foyer le point O′ ($OO' = AB$) et pour tangente au sommet la droite $\Delta$.




Il en résulte que le point M décrit la podaire de la parabole P′ par rapport au point O; cette courbe est, comme on sait, une cubique circulaire ayant pour asymptote la droite $\Delta$. Le point O est un point double de cette podaire, les tangentes en ce point sont perpendiculaires aux tangentes issues du même point à la parabole P′. Or pour que ces dernières tangentes soient réelles, il faut que le point O soit extérieur à P′, c'est-à-dire que la distance de ce point au foyer soit supérieure à sa distance à la directrice, ce qui donne la condition $b > 2a$, en conservant les notations de la solution précédente. Si le point O est sur la parabole P′, le lieu est une cissoïde oblique, et enfin si le point O est à l'intérieur, le point double est isolé.

Victor BERTRAND, répétiteur au lycée de Douai.

Ont résolu la même question : MM. E.-N. Barisien; Henri Bonnard, surveillant général au lycée de Bordeaux; Forcué, répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan; A. Laureaux, lycée de Besançon; Pégorier, répétiteur au collège de Cette; Georges-Alfred Poitillart, à Joigny (Yonne); L. Bailly, lycée de Dijon; Louis Chomard, pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne; Gratien, lycée Saint-Louis; Martinet, lycée de Toulouse; G. Vergnon, à Lagarde.

---

**388.** — *On donne une parabole et un cercle ayant son centre sur l'axe. Trouver le lieu du point de rencontre des normales à la parabole aux points où elle est coupée par une tangente au cercle.*

Soient

$$y^2 - 2px = 0,$$
$$(x - a)^2 + y^2 - R^2 = 0$$

les équations de la parabole et du cercle ; une tangente quelconque à ce cercle a pour équation

$$(x - a)\cos\varphi + y\sin\varphi - R = 0.$$

Les normales à la parabole aux points de rencontre avec cette tangente se coupent en un point M dont nous déterminerons les coordonnées $\alpha$, $\beta$ en écrivant que la tangente au cercle rencontre aux mêmes points la parabole et l'hyperbole aux pieds des normales issues du point M.

Les ordonnées des points de rencontre de la tangente et de la parabole sont les racines de l'équation

$$y^2\cos\varphi + 2py\sin\varphi - 2p(a\cos\varphi + R) = 0. \qquad (1)$$

D'autre part, l'hyperbole d'Apollonius relative au point M a pour équation

$$xy - y(\alpha - p) - p\beta = 0,$$

et les ordonnées des points de rencontre de cette courbe avec la tangente au cercle sont déterminées par l'équation

$$y^2\sin\varphi + y[(\alpha - a - p)\cos\varphi - R] + p\beta\cos\varphi = 0. \qquad (2)$$

Pour que les équations (1) et (2) aient les mêmes racines, il faut que l'on ait

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{(\alpha - a - p)\cos\varphi - R}{2p\sin\varphi} = \frac{p\beta\cos\varphi}{-2p(a\cos\varphi + R)}.$$

Ces équations donnent immédiatement $\alpha$ et $\beta$,

$$\alpha = \frac{(a - p)\cos^2\varphi + R\cos\varphi + 2p}{\cos^2\varphi}, \qquad \beta = \frac{-2\sin\varphi(a\cos\varphi + R)}{\cos^2\varphi}.$$

En transportant l'origine des coordonnées au point de l'axe $Ox$ qui a pour abscisse $a - p$, les coordonnées $x$ et $y$ d'un point du lieu deviennent

$$x = \frac{R\cos\varphi + 2p}{\cos^2\varphi}, \qquad y = \frac{-2\sin\varphi(a\cos\varphi + R)}{\cos^2\varphi}.$$

On peut remplacer dans ces relations $\sin\varphi$ par $\frac{2t}{1+t^2}$ et $\cos\varphi$ par $\frac{1-t^2}{1+t^2}$, et l'on voit ainsi que le lieu est une courbe unicursale du quatrième degré.

Pour construire cette courbe on peut conserver le paramètre $\varphi$ et le faire varier de 0 à $2\pi$; or, en changeant $\varphi$ en $-\varphi$, $x$ ne change pas, $y$ change de signe ; la courbe est donc symétrique par rapport à $Ox$.

Il suffira, par suite, de faire varier $\varphi$ de 0 à $\pi$, et de prendre la symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à $Ox$.

En prenant les dérivées de $x$ et de $y$ par rapport à $\varphi$, on a

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{(R\cos\varphi + 4p)\sin\varphi}{\cos^3\varphi},$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = \frac{2(R\cos^2\varphi - a\cos\varphi - 2R)}{\cos^3\varphi}.$$

Pour discuter la forme de la courbe il faudrait comparer les différentes valeurs remarquables de $\varphi$, pour lesquelles $x$, $y$ et leurs dérivées s'annulent ; nous nous bornerons à examiner un seul cas, celui où l'on a

$$0 < a < R, \qquad 4p < R.$$

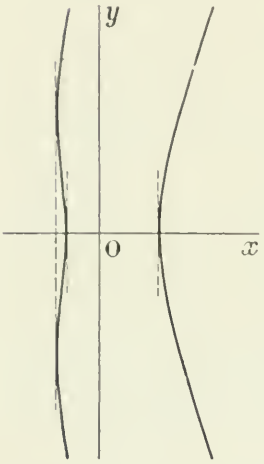
Dans cette hypothèse, les deux racines du numérateur de $\frac{dy}{d\varphi}$ sont extérieures à l'intervalle $(-1, +1)$ et ne sont pas à considérer ; $y$ est constamment négatif, quand $\varphi$ varie de 0 à $\pi$. De plus, il existe deux angles obtus $\alpha$ et $\beta$ définis par les équations

$$\cos\alpha = -\frac{2p}{R}, \qquad \cos\beta = -\frac{4p}{R};$$

le premier de ces angles annule $x$, et l'autre $\frac{dx}{d\varphi}$.

Nous aurons donc le tableau de valeurs suivant :

| $\varphi$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$ | $\frac{\pi}{2}+\varepsilon$ | | $\alpha$ | | $\beta$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $2p+R$ | croît | $+\infty$ | $+\infty$ | décroît | $0$ | décroît | $-\frac{R^2}{8p}$ | croît | $2p-R$ |
| $y$ | $0$ | décroît | $-\infty$ | $-\infty$ | | | croît | | | $0$ |




et la forme de courbe ci-contre.

Les branches infinies sont paraboliques, les coefficients angulaires des directions asymptotiques sont $\pm\frac{R}{p}$.

L. BAILLY, lycée de Dijon.

Ont résolu la même question : MM. Forché, répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan ; H. Gratien, lycée Saint-Louis ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; G. Martinet, lycée de Toulouse ; Vassier, lycée de Versailles.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**407.** — On considère un rectangle ABCD, dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes de coordonnées, et dont les diagonales passent par l'origine. L'un des sommets A de ce rectangle a pour coordonnées $a$, $b$.

1. Trouver l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent par les trois autres sommets B, C, D de ce rectangle. Lieu des centres de ces hyperboles.

2. Par l'origine des coordonnées, on mène des parallèles aux asymptotes. Chacune de ces parallèles rencontre l'hyperbole en un point ; soient M et N ces deux points. Équation de la droite MN.

3. Trouver le lieu de l'intersection de MN avec la ligne PQ, qui joint les points de contact des tangentes issues de A.

4. On prend l'une quelconque des hyperboles précédentes : le diamètre de cette hyperbole qui passe par le point $C(-a, -b)$, rencontre la ligne MN en R, et PQ en S. On demande le lieu de R et le lieu de S.

A. Morel.

**408.** — On demande de démontrer que les trois racines de l'équation

$$x^3+27px^2+qx+9pq-1458p^3=0$$

sont en progression arithmétique, et de résoudre cette équation. M. Fevre, à Paris.

**409.** — Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients du polynome

$$ax^3+bx^2+cx+d$$

pour qu'il admette un diviseur du second degré de la forme $x^2-\lambda x+\mu$ qui, lorsqu'on y donne à $x$ la valeur de la racine qui n'annule pas ce diviseur, prenne la valeur de cette racine. Trouver, dans ce cas, les trois racines du polynome.

**410.** — Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients du polynome

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+f$$

pour qu'il admette un diviseur du second degré, $x^2-\lambda x+\mu$, qui prenne les valeurs des deux racines qui ne l'annulent pas, $\gamma$ et $\delta$, quand on y fait $x=\gamma$ et $x=\delta$ ou $x=\delta$ et $x=\gamma$.

Trouver, dans ces deux cas, les racines du polynome.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

5e Année. N° 8 Mai 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**384.** — *D'un point* P *on mène les normales à un ellipsoïde et par les pieds de ces normales, les plans tangents.*

*1° Trouver le lieu des centres des quadriques* $\Sigma$ *tangentes à ces plans.*

*2° Parmi ces quadriques* $\Sigma$, *on considère celles qui sont concentriques à l'ellipsoïde ; trouver le lieu des axes de ces quadriques.*

*3° Trouver le lieu des points* P *pour lesquels les quadriques* $\Sigma$ *sont de révolution et sont concentriques à l'ellipsoïde.*

Prenons pour axes les axes principaux de l'ellipsoïde ; désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les coordonnées du point P, par

$$a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - p^2 = 0 \qquad (1)$$

l'équation tangentielle de l'ellipsoïde, et par $u$, $v$, $w$, $p$ les coordonnées de l'un des plans tangents à l'ellipsoïde au pied de l'une des six normales issues du point P. Les coordonnées du point de contact de ce plan sont $\frac{f'_u}{f'_p}$, $\frac{f'_v}{f'_p}$, $\frac{f'_w}{f'_p}$, ou $x = -\frac{a^2u}{p}$, $y = -\frac{b^2v}{p}$, $z = -\frac{c^2w}{p}$ ; d'autre part, la normale envisagée étant perpendiculaire au plan $(u, v, w, p)$, a pour paramètres directeurs $u$, $v$, $w$ ; elle a donc pour équations $\frac{px + a^2u}{u} = \frac{py + b^2v}{v} = \frac{pz + c^2w}{w}$. Il n'y a plus qu'à exprimer que cette droite passe au point $(\alpha, \beta, \gamma)$ pour avoir les autres relations que doivent vérifier $u$, $v$, $w$, $p$ ; on obtient ainsi

$$\left.\begin{aligned} (b^2 - c^2)vw + p(w\beta - v\gamma) &= 0, \\ (c^2 - a^2)wu + p(u\gamma - w\alpha) &= 0, \\ (a^2 - b^2)uv + p(v\alpha - u\beta) &= 0; \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

les coordonnées $u$, $v$, $w$, $p$ satisfont donc aux quatre équations (1) et (2).

On sait d'ailleurs que l'équation tangentielle des quadriques tangentes à six plans contient linéairement trois paramètres arbitraires et s'obtient en combinant linéairement les équations de quatre surfaces de seconde classe tangentes à ces six plans ; l'équation générale des surfaces considérées est donc

$$\begin{aligned} a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - p^2 + 2\mu[(b^2 - c^2)vw + p(w\beta - v\gamma)] \\ + 2\nu[(c^2 - a^2)wu + p(u\gamma - w\alpha)] + 2\rho[(a^2 - b^2)uv + p(v\alpha - u\beta)] = 0, \end{aligned} \qquad (3)$$

$\mu$, $\nu$, $\rho$ étant trois paramètres arbitraires.

1° Le centre d'une quadrique est le pôle du plan de l'infini $(0, 0, 0, 1)$ ; l'équation du centre d'une quadrique dont l'équation tangentielle est $f(u, v, w, p) = 0$, est alors

$$0\frac{\partial f}{\partial u} + 0\frac{\partial f}{\partial v} + 0\frac{\partial f}{\partial w} + \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial f}{\partial p} = 0.$$

En appliquant ce calcul à l'équation (3), on a de suite l'équation du centre de la surface $(\mu, \nu, \rho)$

$$\mu(w\beta - v\gamma) + \nu(u\gamma - w\alpha) + \rho(v\alpha - u\beta) - p = 0,$$

ou

$$u(\rho\beta - \nu\gamma) + v(\mu\gamma - \rho\alpha) + w(\nu\alpha - \mu\beta) + p = 0;$$

les coordonnées du centre de cette surface sont donc

$$x = \rho\beta - \nu\gamma, \qquad y = \mu\gamma - \rho\alpha, \qquad z = \nu\alpha - \mu\beta;$$

en multipliant ces équations par $\alpha, \beta, \gamma$ et les ajoutant ensuite, on élimine $\mu, \nu, \rho$; il y a donc un lieu de centres et ce lieu est le plan

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0. \tag{4}$$

2° Si l'on veut que le centre soit à l'origine, il faut annuler les trois expressions $\rho\beta - \nu\gamma$, $\mu\gamma - \rho\alpha$, $\nu\alpha - \mu\beta$; on obtient

$$\frac{\mu}{\alpha} = \frac{\nu}{\beta} = \frac{\rho}{\gamma} = \frac{1}{\lambda},$$

et les trois paramètres arbitraires, $\mu, \nu, \rho$, se réduisent à un seul, $\lambda$. L'équation (3) devient alors

$$\lambda(a^2u^2 + b^2v^2 + c^2w^2 - p^2) + 2Avw + 2Bwu + 2Cuv = 0, \tag{5}$$

avec les notations abrégées

$$A = (b^2 - c^2)\alpha, \qquad B = (c^2 - a^2)\beta, \qquad C = (a^2 - b^2)\gamma.$$

Nous exprimerons qu'un point $M(x, y, z)$ est un point d'un axe, en exprimant qu'il est le pôle d'un plan perpendiculaire au rayon OM. Si nous désignons par $F(u, v, w, p) = 0$ l'équation (5) et par $u, v, w, p$ les coordonnées du plan polaire de M, nous aurons

$$x = \frac{F'_u}{F'_p}, \qquad y = \frac{F'_v}{F'_p}, \qquad z = \frac{F'_w}{F'_p},$$

et

$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \theta;$$

dès lors, nous formerons les trois premières équations, nous y remplacerons $u, v, w$ par $\theta x, \theta y, \theta z$, et nous n'aurons plus qu'à éliminer $p, \theta, \lambda$ entre les trois équations obtenues ainsi. Or ces trois équations sont

$$\left.\begin{aligned} \theta\lambda . a^2x + p\lambda . x + \theta(Cy + Bz) = 0, \\ \theta\lambda . b^2y + p\lambda . y + \theta(Cx + Az) = 0, \\ \theta\lambda . c^2z + p\lambda . z + \theta(Ay + Bx) = 0; \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

elles sont linéaires et homogènes par rapport à $\theta\lambda$, $p\lambda$ et $\theta$; elles doivent avoir une solution non nulle, puisque déjà $\theta$ n'est pas nul, attendu que $\theta = 0$ entraînerait $u = v = w = 0$, et que le plan passant alors à l'origine ne serait pas le plan polaire d'un point quelconque de l'un des axes; donc leur déterminant doit être nul

$$\begin{vmatrix} a^2x & x & Cy + Bz \\ b^2y & y & Cx + Az \\ c^2z & z & Ay + Bx \end{vmatrix} = 0.$$

Telle est l'équation du lieu des axes. Elle s'écrit plus simplement,

$$\frac{\alpha x^2}{A}(\beta y + \gamma z) + \frac{\beta y^2}{B}(\alpha x + \gamma z) + \frac{\gamma z^2}{C}(\alpha x + \beta y) = 0. \tag{7}$$

Cette équation représente un cône du troisième ordre, qui contient les trois axes de l'ellipsoïde.

3° Pour résoudre la troisième partie, il suffit de remarquer que les équations (6) déterminent les axes de la surface $(\lambda)$, quand le rapport $\frac{\lambda p}{\theta}$ est choisi de façon qu'elles aient une solution commune non

nulle par rapport à $x$, $y$, $z$. On exprimera donc que la surface est de révolution, en déterminant ce rapport de façon que les trois équations (6) représentent le même plan. Les relations qui expriment ce fait s'obtiennent en annulant les six déterminants du second ordre formés avec les équations (6) ; on a ainsi

$$(p+b^2\theta)(p+c^2\theta)\lambda^2 - A^2\theta^2 = 0, \qquad A(p+a^2\theta)\lambda - BC\theta = 0,$$
$$(p+c^2\theta)(p+a^2\theta)\lambda^2 - B^2\theta^2 = 0, \qquad B(p+b^2\theta)\lambda - CA\theta = 0,$$
$$(p+a^2\theta)(p+b^2\theta)\lambda^2 - C^2\theta^2 = 0, \qquad C(p+c^2\theta)\lambda - AB\theta = 0.$$

Si aucune des lettres A, B, C ne représente un nombre nul, les relations de la seconde colonne suffisent à entraîner le système, et le lieu des points $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ s'obtient en éliminant $p\lambda$, $\theta\lambda$ et $\theta$ entre ces relations ; on a ainsi l'équation

$$\begin{vmatrix} Aa^2 & A & BC \\ Bb^2 & B & CA \\ Cc^2 & C & AB \end{vmatrix} = 0,$$

qui peut s'écrire

$$(c^2-a^2)(a^2-b^2)\beta^2\gamma^2 + (a^2-b^2)(b^2-c^2)\gamma^2\alpha^2 + (b^2-c^2)(c^2-a^2)\alpha^2\beta^2 = 0. \qquad (8)$$

Telle est l'équation du lieu. Elle représente un cône du quatrième ordre ayant pour lignes doubles les trois axes de coordonnées.

Si l'on annule l'un des nombres $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, on ne trouve aucune solution nouvelle, car on voit aisément qu'un autre de ces nombres doit être nul, et l'on obtient à nouveau les trois axes de coordonnées, qui sont compris dans le lieu précédent.

Solution analogue par M. Vasnier (lycée de Versailles).

Solution différente et excellente de M. Victor Bertrand, répétiteur au lycée de Douai ; solution analogue, excellente aussi, de M. F. Taralle, à Evreux.

**Remarques géométriques.** — Soit A le point d'où sont issues les normales à la quadrique C, dont nous désignerons les axes par OX, OY, OZ. Considérons les plans tangents menés à la quadrique par les pieds des six normales issues de A ; et les surfaces de seconde classe $\Sigma$ tangentes à ces six plans. Les surfaces forment un système tangentiel à trois paramètres, qui sera défini par quatre surfaces de seconde classe de ce système (à condition que ces quatre surfaces ne fassent pas partie d'un système tangentiel d'ordre moindre).

Cherchons quatre surfaces définissant le système $\Sigma$. Pour cela, considérons les six droites de section des plans tangents par un des plans principaux, XOY par exemple ; nous allons montrer qu'elles sont tangentes à une même conique faisant partie du système $\Sigma$.

On sait, en effet, que le point de rencontre d'une normale à une quadrique avec un des plans principaux, est le pôle de la droite d'intersection du plan tangent correspondant, par rapport à la focale située dans ce plan principal.

Or les six normales issues de A sont sur un même cône du second degré, passant de plus par la droite OA. Les six droites dont nous nous occupons sont donc tangentes à une même conique, polaire réciproque de la courbe d'intersection du cône des normales avec le plan XOY par rapport à la focale de ce plan. Il est évident de plus que cette conique est une parabole. Nous aurons de même deux autres paraboles dans les autres plans principaux.

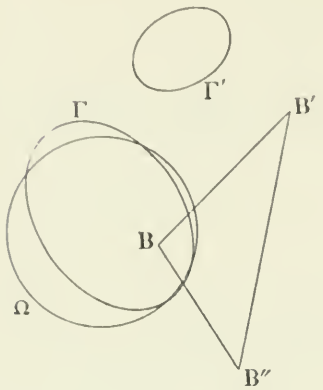
Le système $\Sigma$ sera défini par les trois paraboles et la quadrique (C). Les quatre surfaces ne font pas d'ailleurs, en général, partie d'un système tangentiel à deux paramètres.

1° *Recherche du lieu des centres.* — Il n'y a pas, en général, de lieu des centres pour un système à trois paramètres. Pour qu'il y en ait un, il faut et il suffit que les centres des quatre surfaces définissant le système soient dans un même plan, qui est alors le lieu des centres de toutes les surfaces du système.

Considérons les trois paraboles précédentes ; leurs centres sont leurs points à l'infini. Or ces points sont les pôles du plan tangent au cône des normales le long de OA, par rapport aux coniques focales de la quadrique (C). Ces trois pôles sont en ligne droite, car ces focales font partie d'un même faisceau tangentiel. Soit $\Delta$ cette droite ; alors le plan défini par O et $\Delta$ contient les quatre centres ; il y a donc un lieu de centres et ce lieu est le plan (O, $\Delta$).

2° On considère parmi les quadriques $\Sigma$ celles qui ont pour centre commun le point O, et on demande le lieu de leurs axes. Il est visible d'abord que ces quadriques forment un faisceau tangentiel, car en exprimant

que le centre de l'une d'elles coïncide avec le point O, on ne dispose que de deux paramètres. Si nous considérons les cônes des tangentes, issus de O, ils forment un faisceau tangentiel, mais comme ce sont les cônes asymptotes, il s'ensuit que les coniques, sections du faisceau par le plan de l'infini, forment un faisceau tangentiel, qui est défini par deux coniques Γ, Γ′, de ce faisceau. Ceci posé, le lieu des axes est évidemment un cône de sommet O ; cherchons sa section par le plan de l'infini. A cet effet, considérons une quadrique du faisceau C et soit Γ sa conique à l'infini. Je désignerai par Ω le cercle de l'infini. Les points à l'infini sur les axes de cette quadrique sont les sommets B, B′, B″ du triangle conjugué commun à Γ et à Ω. Cherchons le lieu de ces points. Pour cela considérons le réseau tangentiel (Γ, Γ′, Ω). Les pôles de B′B″ par exemple, par rapport aux coniques de ce réseau, sont en ligne droite. Deux d'entre eux sont en effet confondus en B, et la droite qui joint B au pôle de B′B″ par rapport à Γ′ contient tous les autres pôles. On en conclut que l'enveloppe de B′B″ est la Cayleyenne du réseau (Γ, Γ′, Ω) (c'est la trace sur le plan de l'infini du cône enveloppe des plans principaux des quadriques du faisceau). Or le lieu du point B est la polaire réciproque de l'enveloppe de B′B″ par rapport à Ω. C'est une courbe du troisième degré. Le lieu des axes est par suite un cône du troisième degré ayant pour sommet l'origine.




A. LEBOURG, lycée Louis-le-Grand.

---

**390.** — *Les normales à une quadrique en tous les points d'une section circulaire forment une surface qui admet une directrice rectiligne et dont les sections par des plans parallèles à celui de la section circulaire sont des conchoïdes de coniques, et, exceptionnellement, des conchoïdes de droites.*

**Solution analytique.** — Prenons pour axes des $x$ et des $y$ deux diamètres rectangulaires de la section circulaire considérée, et pour axe des $z$ une normale à son plan et passant par son centre ; si R désigne le rayon du cercle, l'équation de la quadrique a la forme

$$x^2 + y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2C''z - R^2 = 0.$$

La normale à cette quadrique en un point $(\alpha, \beta, 0)$ du cercle a pour équation

$$\frac{x-\alpha}{\alpha} = \frac{y-\beta}{\beta} = \frac{z}{B'\alpha + B\beta + C''}, \tag{1}$$

et l'on a la condition

$$\alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0. \tag{2}$$

On aura l'équation du lieu engendré par ces normales en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre les équations (1) et (2).

On voit immédiatement que la surface engendrée admet comme directrice rectiligne l'axe des $z$, puisque toutes les normales rencontrent cette droite.

Les équations (1) peuvent s'écrire

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{B'\alpha + B\beta + C''} + 1 ;$$

on en tire

$$\frac{\alpha}{x} = \frac{\beta}{y} = \frac{R}{\rho},$$

en posant $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ; ou

$$\alpha = \frac{Rx}{\rho}, \qquad \beta = \frac{Ry}{\rho},$$

et en transportant ces valeurs dans la relation

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{z}{B'\alpha + B\beta + C''} + 1,$$

on a

$$\frac{\rho}{R} = \frac{\rho z}{(B'x + By)R + C''\rho} + 1$$

c'est l'équation du lieu.

Coupons cette surface par le plan $z = h$, et cherchons l'équation de la section en coordonnées polaires en remplaçant $x$ par $\rho \cos \omega$ et $y$ par $\rho \sin \omega$ ; on a

$$\rho = \frac{Rh}{(B' \cos \omega + B \sin \omega)R + C''} + R.$$

Cette courbe est une conchoïde de la conique

$$\rho = \frac{Rh}{(B' \cos \omega + B \sin \omega)R + C''}$$

dont le foyer est à l'origine ; cette conique se réduit à une droite si $C''$ est nul, c'est-à-dire si le centre de la surface est au centre de la section circulaire.

G TZITZÉICA, à Bucarest.

**Solution géométrique.** — La normale à la quadrique en un point M de la section circulaire étant perpendiculaire à la tangente au cercle en ce point, rencontre la perpendiculaire au plan du cercle mené par son centre ; cette droite est donc une directrice rectiligne de la surface.

Soit Q un plan parallèle au plan R de la section, O′ le point où il est coupé par l'axe de cette section, N le point où il est coupé par la normale en M à la quadrique, P le point où il est coupé par la parallèle à MN issue du centre O de la section. Les trois points O′, N, P étant en ligne droite, et la distance PN étant constamment égale au rayon OM du cercle donné, le lieu du point N est une conchoïde du lieu du point P. Mais ce dernier lieu est une conique, car la droite OP, parallèle à une normale au cône S circonscrit à la quadrique suivant le cercle O, décrit un cône égal au cône supplémentaire du cône S, par conséquent un cône du second degré, ayant une focale dirigée suivant OO′. Donc le lieu du point P est une conique et le lieu du point N est une conchoïde de cette conique *par rapport à son foyer* O′.

Pour que le lieu du point P dégénère en une conchoïde de droite, il faut que le lieu de la droite OP dégénère en un plan, et que par conséquent le cône circonscrit à la quadrique suivant le cercle O dégénère en un cylindre ; c'est ce qui arrive lorsque le plan R passe par le centre de la quadrique.

V. JAMET.

Ont résolu cette question : MM. R. Escot, à Labastide-sur-Lhers ; Ch. Hugon, à Nîmes ; A. Laureaux, lycée de Besançon.

## ALGÈBRE

**391.** — *Le plus grand nombre entier contenu dans*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

*est égal ou supérieur d'une unité au plus grand nombre entier contenu dans* $L(n+1)$.

Si $p$ désigne un nombre entier quelconque, on a, d'après la formule des accroissements finis,

$$L(p+1) - Lp = \frac{1}{p+\theta},$$

où $\theta$ représente un nombre positif plus petit que 1 ; donc

$$\frac{1}{p} > L(p+1) - Lp > \frac{1}{p+1}.$$

Remplaçons dans ces inégalités $p$ par $1, 2, 3, \ldots, n$ successivement, puis ajoutons membre à membre ; nous avons

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} > L(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1}.$$

Or, si S et S′ désignent les sommes extrêmes, on a la relation

$$S - S' = 1 - \frac{1}{n+1},$$

et, par suite,

$$S > L(n+1) > S - 1 + \frac{1}{n+1};$$

on a donc $$0 < S - L(n+1) < 1,$$
ce qui démontre le théorème.

J. L.

Ont résolu cette question : MM. C. Couturier, à Louvain ; R. Escot, à Labastide-sur-Lhers ; G. de France, à Versailles ; V. Jamet ; G. Tzitzéica, à Bucarest.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### Ecole polytechnique (1894) (*suite*).

#### Algèbre

**213.** — Etudier la courbe $y = \log_x a$, $a$ étant donné et $x$ variable. Chercher la tangente à l'origine et le point d'inflexion. (P.)

**214.** — Si l'équation $f(x) = 0$ admet une racine d'ordre $2k$ de multiplicité, on en conclut que $f(x)$ admet, en général $2k$ racines imaginaires. Comme conséquence : une équation qui présente $2k$ lacunes a au moins $2k$ racines imaginaires. (P.)

**215.** — Étudier la fonction $y = \cos\sqrt{x}$. (P.)

**216.** — Etudier la fonction $y = e^{\frac{2x-1}{x^2-x}}$. L'exposant est de la forme $\frac{f'(x)}{f(x)}$ ; le décomposer en fractions simples. (P.)

**217.** — Rendre compte du théorème relatif à la dérivée logarithmique sur une courbe. (C.)

**218.** — Chercher la condition pour qu'un polynome soit exactement divisible par sa dérivée. De quelle forme est un tel polynome ? (F.)

**219.** — Conditions pour qu'un polynome homogène à trois variables et du second degré soit un carré parfait. (L.)

**220.** — Démontrer géométriquement le théorème de Rolle. (L.)

**221.** — Démontrer que s'il y a une lacune entre deux termes de même signe, l'équation correspondante a au moins deux racines imaginaires. (P.)

**222.** — Trouver la limite de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x = 0$. Trouver l'ordre infinitésimal de $(1+x)^{\frac{1}{x}} - e$. (P.)

**223.** — Trouver la dérivée de l'expression
$$y = \operatorname{arc\,tg}\frac{a-x}{1+ax}.$$
Expliquer le résultat. (C.)

**224.** — Trouver la limite du quotient $\frac{L(1+x)}{x}$, quand $x$ tend vers 0. (C.)

**225.** — Etudier la série
$$\frac{1}{2^k-1} - \frac{1}{2^k+1} + \frac{1}{3^k-1} - \frac{1}{3^k+1} + \cdots$$ (C.)

**226.** — Qu'appelle-t-on fonction implicite ? Montrer que $y$ défini par $f(x, y) = 0$ est une fonction continue. (L.)

**227.** — Variations de $y = e^{-\frac{1}{x-1}}$ quand $x$ varie de 0 à 2. (L.)

**228.** — Etudier les variations de $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$. (P.)

**229.** — Conditions pour que le quotient de deux imaginaires soit réel. (C.)

**230.** — Variations de $y = x - \log_a x$. Cas où $a$ est plus petit que 1. (L.)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**411.** — On considère une parabole et un point A ; on mène une droite quelconque D et on joint les points de rencontre de cette droite avec la parabole au point A.

1° On demande l'équation de la droite D′ qui joint les deux autres points de rencontre de ces droites avec la parabole.

2° Si la droite D tourne autour d'un point fixe P, la droite D′ tourne autour d'un point fixe P′. Trouver les coordonnées de P connaissant celles de P′.

3° Quand le point P décrit un cercle, le point P′ décrit une conique. Lieu des points A pour lesquels cette conique est un hyperbole équilatère.

4° Pour quelles positions du point A cette conique est-elle un cercle ?

Lieu de ces points quand le rayon du cercle varie seul. E. H.

**412**. On donne une parabole (P) ayant pour axe $Ox$ et une droite $\Delta$ perpendiculaire à cet axe ; une parallèle à $Ox$ rencontre respectivement $\Delta$ et (P) aux points A et B.

1° Démontrer que les cercles (C) qui admettent AB pour diamètre restent tangents à un cercle fixe, lorsque AB se déplace parallèlement à $Ox$. Dans les mêmes conditions :

2° Trouver le lieu du centre du cercle (C′) circonscrit au triangle conjugué commun à la parabole (P) et au cercle (C) ;

3° Trouver l'enveloppe du cercle (C′). Hénet, professeur au lycée de Toulouse.

*Épure.* — On donne les points :

$$a, a' \qquad x = -10, \qquad y = 10, \qquad z = 16,$$
$$b, b' \qquad x = -2, \qquad y = 10, \qquad z = 8.$$

1° Dans le plan de front $ab$, on considère la circonférence décrite sur $ab$, $a'b'$ comme diamètre ; c'est la méridienne principale d'un tore ayant pour axe la verticale

$$0, \qquad x = 0, \qquad y = 10.$$

2° Dans le plan de bout $a'b'$, on considère la circonférence décrite sur $ab$, $a'b'$ comme diamètre ; c'est la méridienne d'un deuxième tore ayant pour axe la ligne de bout

$$\omega', \qquad x = 0, \qquad z = 6.$$

Représenter la surface opaque du tore à axe vertical contenue dans le tore à axe de bout.

(*Ecole normale, concours de 1894.*)

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE DES MINES DE SAINT-ÉTIENNE (Concours de 1894.)

**392**. *On donne les deux expressions*

$$P = \frac{x^5}{4} - ax^4 + x^3\left(a^2 - \frac{3}{2}\right) + x^2(6a - 1) - x(6a^2 - 4a) - 4a^2,$$

$$Q = e^{\frac{x}{\operatorname{tg} x}} - e^{\frac{\pi}{4}}.$$

*On sait en outre que* P *est divisible par* $x - 1 - \sqrt{3}$ ; $a$ *est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.*

*On demande :*

*1° De pousser aussi loin que possible la résolution de l'équation* $P = 0$ ;

*2° De pousser aussi loin que possible la résolution de l'équation* $Q = 0$ ;

*3° De construire les racines de l'équation* $P - Q = 0$ ;

*4° D'étudier les variations des racines de* $P - Q = 0$, *lorsque* $a$ *prend toutes les valeurs qu'il peut prendre entre* $-\infty$ *et* $+\infty$.

**1°** Le polynome P étant à coefficients commensurables et admettant la racine $1 + \sqrt{3}$, admettra également la racine $1 - \sqrt{3}$ ; il sera donc divisible par $(x - 1)^2 - 3$ ou $x^2 - 2x - 2$. Cette propriété ayant lieu quel que soit $a$, les coefficients des différentes puissances de $a$ dans le polynome seront divisibles par $x^2 - 2x - 2$.

Ordonnons le polynome P par rapport à $a$ ; il vient

$$P \equiv a^2(x^3 - 6x - 4) - ax(x^3 - 6x - 4) + \frac{x^2}{4}(x^3 - 6x - 4)$$

$$\equiv \left(\frac{x^2}{4} - ax + a^2\right)(x^3 - 6x - 4)$$

$$\equiv \left(\frac{x}{2} - a\right)^2(x^3 - 6x - 4).$$

Or, on a $$x^3 - 6x - 4 \equiv (x^2 - 2x - 2)(x + 2)$$

et, par suite, $$P \equiv \left(\frac{x}{2} - a\right)^2(x + 2)(x^2 - 2x - 2).$$

L'équation $P = 0$ est complètement résolue.

2° Pour résoudre l'équation $Q = 0$, nous construirons la courbe qui a pour équation

$$y = e^{\frac{x}{\operatorname{tg} x}} - e^{\frac{\pi}{4}},$$

et nous déterminerons les points de rencontre de cette courbe avec l'axe des $x$.

La courbe étant symétrique par rapport à $Oy$, nous ne donnerons à $x$ que des valeurs positives, en remarquant que $y$ est discontinu pour les valeurs de $x$ qui sont multiples de $\pi$.

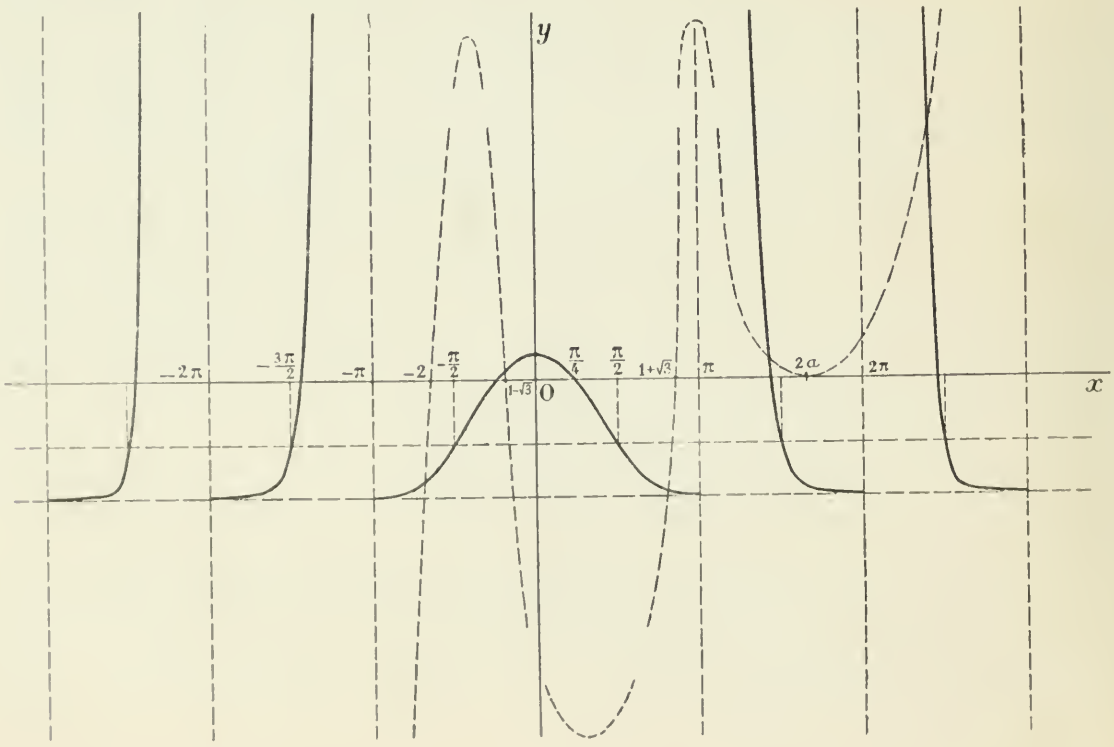
On a $$y' = e^{\frac{x}{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{\sin 2x - 2x}{2 \sin^2 x},$$

ce qui montre que $y'$ est toujours négatif ; par conséquent $y$ va constamment en décroissant.

On aura donc le tableau de variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi - \varepsilon$ | $\pi + \varepsilon$ | | $\frac{3\pi}{2}$ | | $2\pi - \varepsilon$ | $2\pi + \varepsilon$ | | $\frac{5\pi}{2}$ | | $3\pi - \varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | $e - e^{\frac{\pi}{4}}$ | décroît | $1 - e^{\frac{\pi}{4}}$ | décroît | $-e^{\frac{\pi}{4}}$ | $+\infty$ | décroît | $1 - e^{\frac{\pi}{4}}$ | décroît | $-e^{\frac{\pi}{4}}$ | $+\infty$ | décroît | $1 - e^{\frac{\pi}{4}}$ | décroît | $-e^{\frac{\pi}{4}}$ |

On en déduit la forme de la courbe (en traits pleins sur la figure).



On voit ainsi que l'équation $Q = 0$ admet une racine positive dans chacun des intervalles $\left(\lambda\pi, \lambda\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, quel que soit $\lambda$. Dans le premier intervalle $(\lambda = 0)$ la racine est $\frac{\pi}{4}$; quand $\lambda$ augmente, la racine se rapproche de $\lambda\pi + \frac{\pi}{2}$. Les racines négatives sont égales aux racines positives changées de signes.

3° On aura les racines de l'équation $P - Q = 0$ en déterminant les abscisses des points de rencontre des deux courbes

$$y = Q, \qquad y = P.$$

Nous avons tracé sur la figure, en trait discontinu, la courbe qui a pour équation

$$y = \left(\frac{x}{2} - a\right)^2 (x+2)(x^2 - 2x - 2),$$

en supposant $2a$ compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et $2\pi$.

On voit alors que l'équation $P - Q = 0$ admet une racine négative comprise entre $-\frac{\pi}{4}$ et $0$, puis une infinité de racines positives.

4° Pour faire la discussion nous considérerons successivement :

I. les racines données par les branches infinies de droite de la courbe transcendante.

II. les racines données par la branche finie.

III. les racines données par les branches infinies de gauche.

I. La courbe algébrique passe, quel que soit $a$, par le point de $Ox$ qui a pour abscisse $1 + \sqrt{3}$, et rencontre $Oy$ en un point d'ordonnée négative, $-4a^2$. Nous aurons donc une racine dans chacun des intervalles $\left(\lambda\pi, \lambda\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, à partir de $\lambda = 1$.

II. Quel que soit $a$, il y a toujours une racine entre $\frac{\pi}{4}$ et $\pi$, et une autre racine entre $0$ et $-\frac{\pi}{4}$. La branche du milieu peut donner une nouvelle racine en rencontrant la branche infinie de la courbe algébrique dont l'abscisse varie de $-2$ à $-\infty$. Il faut pour cela que la valeur du polynome P pour $x = -\pi$ soit inférieure à la valeur de Q pour la même valeur de $x$, c'est-à-dire qu'on ait

$$(\pi + 2a)^2(\pi - 2)(\pi^2 + 2\pi - 2) > 4e^{\frac{\pi}{4}}.$$

III. Si $a > 0$, la figure montre que les branches infinies de gauche ne donnent pas de racine ; il en est de même si $2a$ est compris entre $0$ et $-2$.

Si $2a$ est compris entre $-2$ et $-2\pi$, il y a une ou deux racines comprises dans cet intervalle ; si $2a$ est compris entre $-2\pi$ et $-4\pi$, y a deux ou trois racines et ainsi de suite.

H. FEREY, élève au pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne.

---

**393.** — *On considère un conducteur rectiligne* CD, *mobile autour de son milieu* O, *et dont les extrémités parcourent un conducteur circulaire de même métal et de même section, dont le centre est au point* O. *En deux points* A *et* B *du conducteur circulaire sont fixés les deux fils issus des pôles d'une pile* P. *On donne :*

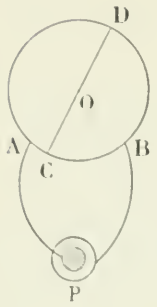
*Le diamètre* $CD = d$ *du conducteur circulaire. Sa résistance par unité de longueur sera prise égale à l'unité ;*

*La longueur* $m$ *de l'arc* AB;

*La résistance* R *du circuit extérieur* APB *et de la pile, et la force électromotrice* E *de la pile.*

*Déterminer l'intensité et le sens du courant qui traverse le conducteur* CD *dans les diverses positions de ce conducteur.*

*Premier cas.* — Les points C et D sont placés, comme sur la figure, de telle sorte que le conducteur CD forme pont.




Si on appelle I, $i$, $i'$, $k$, $k'$, $y$, les intensités du courant dans les branches PA, AC, AD, CB, DB, CD, et $x$ la distance du point C au milieu de l'arc ACB, la conservation du courant fournit les équations

$$I = i + i',$$
$$I = k + k',$$
$$i = k + y\ ;$$

l'existence de la force électromotrice E en P et l'absence de force électromotrice dans le cercle s'expriment par

$$IR + i\left(\frac{m}{2} - x\right) + k\left(\frac{m}{2} + x\right) = E,$$
$$i\left(\frac{m}{2} - x\right) + yd - i'\left(\frac{\pi d}{2} - \frac{m}{2} + x\right) = 0,$$
$$yd + k'\left(\frac{\pi d}{2} - \frac{m}{2} - x\right) - k\left(\frac{m}{2} + x\right) = 0.$$

En éliminant I, $i$, $i'$, $k$ et $k'$, on trouve

$$y = \frac{4\pi E x}{\pi(4+\pi)(R+m)d - (4+\pi)m^2 - 4\pi x^2}.$$

Cette expression est positive ou négative suivant que $x$ est positif ou négatif ; elle est nulle pour $x = 0$ et croît en même temps que $x$. Pour $x = \frac{m}{2}$, c'est-à-dire quand le point C est en A, elle prend sa valeur maximum

$$Y = \frac{2\pi E m}{\pi(4+\pi)(R+m)d - (4+2\pi)m^2}.$$

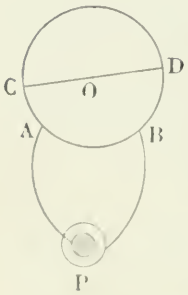
Si on appelle R′ la résistance du système ACDB, en posant $E = I(R + R')$, on trouve

$$R' = m - \frac{m^2}{\pi d} - \frac{4x^2}{(4+\pi)d}.$$

Cette résistance est minimum quand le point C est en A, et donnée, dans ce cas, par l'expression

$$r = m - \frac{2(2+\pi)}{\pi(4+\pi)}\frac{m^2}{d}.$$

*Second cas.* — Les points C et D sont placés tous deux sur l'un des arcs de cercle qui relient A et B.




Dans ce cas, le conducteur CD forme une dérivation ordinaire et l'intensité du courant qui le traverse est évidemment indépendante de la position de ce conducteur sur l'arc ACDB. Elle doit donc être égale, en particulier, à l'intensité trouvée dans le cas précédent quand on supposait le point C en A, c'est-à-dire à Y. De même, la résistance du système formé par le cercle et par le conducteur CD est égale à $r$.

On arrive, bien entendu, au même résultat en appliquant les théorèmes de Kirchhoff ; les calculs sont plus simples que pour le premier cas, mais inutiles, à cause de la remarque précédente.

[M. René Pommier, du pensionnat Saint-Louis, à Saint-Etienne, a envoyé une solution exacte, mais où le second cas n'est pas signalé.]

---

**394.** — *Étant donné un combustible dont la composition centésimale en poids est la suivante :*

*Carbone* 84, *Hydrogène* 6,60, *Oxygène* 8, *Azote* 1,40,

*on suppose que* 1 *kilogramme de cette substance est brûlé par la quantité d'air strictement nécessaire à sa combustion complète. On demande :*

1° *Le volume d'air nécessaire, mesuré à la température de* 0° *et à la pression de* 760$^{mm}$ *de mercure ;*

2° *La composition centésimale en volume, à la température de* 100°, *du gaz résultant de la combustion ; le volume total de ce gaz, mesuré à* 0° *et* 760$^{mm}$ ; *la densité de ce gaz, dans les mêmes conditions. On supposera l'air composé exactement de* 4 *vol. d'azote pour* 1 *vol. d'oxygène.*

*La tension de la vapeur d'eau à* 0° *est égale à* 4$^{mm}$,57 *de mercure.*

*Le volume de* 1 *gramme d'hydrogène à* 0° *et* 760$^{mm}$ *de mercure est de* 11$^{lit}$,16.

*Enfin les nombres proportionnels des divers éléments sont :*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Poids atomiques :* | *Carbone* 12 | *Hydrogène* 1 | *Oxygène* 16 | *Azote* 14 |
| *Équivalents :* | — 6 | — 1 | — 8 | — 14 |

*Aucune autre donnée ne devra être employée.*

1° Un kilogramme de la substance contient, en grammes,

| | | | |
|---|---|---|---|
| Carbone . . . . . | 840 = 70 × 12 | ou 70 | poids atomiques. |
| Hydrogène . . . . . | 66 = 66 × 1 | — 66 | — |
| Oxygène . . . . . | 80 = 5 × 16 | — 5 | — |
| Azote . . . . . | 14 = 1 × 14 | — 1 | — |

Le carbone exige, pour brûler . . . . . 70 molécules d'oxygène.

L'hydrogène . . . . . 16,5 —

ce qui fait, en tout . . . . . 86,5 —

La substance en fournit . . . . . 2,5

L'air doit donc en apporter . . . . . 84

Or, pour 1 molécule d'oxygène, l'air contient 4 molécules d'azote.

Le volume moléculaire étant 22$^{lit}$,32, le volume d'air demandé sera

$$5 \times 84 \times 22{,}32 = 9374^{lit},4.$$

2° Le gaz résultant de la combustion se compose de

70 molécules de gaz carbonique,
33 — d'eau,
4 × 84 + 0,5 — d'azote.

Ces nombres représentent aussi la composition en volume ; en les ramenant à un volume total égal à 100, on trouve

15,9 de gaz carbonique,
7,5 de vapeur d'eau,
76,6 d'azote.

3° Ce mélange étant ramené à 0° et 760$^{mm}$, il ne reste à l'état gazeux que les 70 molécules de gaz carbonique, les 336,5 molécules d'azote et une certaine quantité de vapeur d'eau saturante dont l'effet est de diminuer de 4$^{mm}$,57 la pression du reste du mélange, de la réduire, par conséquent, à 755$^{mm}$,43. Le volume sera donc

$$(70 + 336{,}5) \times 22{,}32 \times \frac{760}{755{,}43} = 9128^{lit}.$$

4° Pour avoir le poids de ce gaz, remarquons qu'il se compose

de 70 molécules de gaz carbonique qui pèsent. . . . . 70 × 44

de 336,5 molécules d'azote . . . . . 336,5 × 28

d'une certaine quantité d'eau qui occupe un nombre de volumes moléculaires égal à

$$(70 + 336{,}5) \times \frac{760}{755{,}43},$$

mais sous la pression 4$^{mm}$,57, ce qui fait un poids $(70 + 336{,}5) \times \frac{760}{755{,}43} \times \frac{4{,}57}{760} \times 18.$

Pour avoir le poids du même volume d'air sec, remarquons qu'un volume d'air égal à 5 volumes moléculaires renferme 4 molécules d'azote et 1 d'oxygène, et pèse $4 \times 28 + 32$. Le poids cherché est donc

$$(70 + 336{,}5) \times \frac{760}{755{,}43} \times \frac{4 \times 28 + 32}{5}.$$

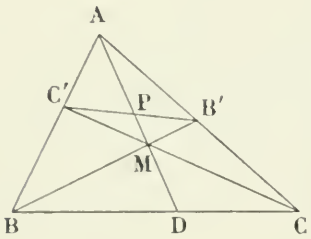
En divisant le poids du gaz par le poids d'un égal volume d'air, on a la densité demandée, et l'on trouve, tous calculs faits,

$$1{,}065.$$

M. A. Laurbeaux (lycée de Besançon) : solution où il n'est tenu compte ni de la présence de l'azote de l'air, ni de celle de la vapeur d'eau dans le mélange.

## ALGÈBRE

**285.** — *On considère un triangle* ABC *et une droite fixe* $\Delta$ *passant par le point* A *et coupant au point* D *le côté opposé* BC. *Soit* M *un point pris sur* $\Delta$ ; *la droite* BM *coupe le côté* AC *en* B′, *et la droite* CM *coupe le côté* AB *en* C′. *On trace* B′C′ *qui coupe en* P *la droite* $\Delta$.




1° *Quelle doit être la position de* M *sur* $\Delta$ *pour que l'on ait*

$$\overline{MP}.\overline{MA} = k.\overline{AD}^2,$$

*$k$ désignant une constante donnée? En posant* $\frac{MA}{AD} = x$, *on montrera que $x$ dépend d'une équation du troisième degré ne renfermant que la constante $k$.*

*Discuter cette équation.*

2° *Trouver quelle doit être, sur* $\Delta$, *la position du point* M *pour que l'aire du triangle* MB′C′ *soit à celle du triangle* ABC *dans un rapport connu $m$.*

*Dans ce problème on posera encore* $\frac{MA}{AD} = x$.

*Pour quelles valeurs de $x$ la quantité $m$ passe-t-elle par un maximum ou un minimum? Discuter l'équation correspondante.*

*On propose enfin de résoudre cette équation quand on suppose le point* D *au milieu de* BC.

(*Agrégation de l'enseignement secondaire spécial, 1893.*)

1° Il résulte des propriétés harmoniques du quadrangle que les deux points A et M divisent harmoniquement le couple PD ; par suite, on a

$$\frac{2}{MA} = \frac{1}{MP} + \frac{1}{MD}.$$

Cette égalité donne MP,

$$MP = \frac{MA.MD}{2MD - MA},$$

ou

$$MP = \frac{MA(MA + AD)}{MA + 2AD}.$$

En portant cette valeur dans la relation imposée

$$MP.MA = k.\overline{AD}^2,$$

elle devient

$$\overline{MA}^2(MA + AD) = k\overline{AD}^2.(MA + 2AD),$$

c'est-à-dire

$$x^3 + x^2 - k(x + 2) = 0, \qquad (1)$$

si l'on pose $$x = \frac{\text{MA}}{\text{AD}}.$$

Telle est l'équation qu'il s'agit de discuter.

Écrivons cette équation ainsi :

$$\frac{x^3 + x^2}{x + 2} = k$$

et étudions les variations de la fonction $y = \dfrac{x^3 + x^2}{x + 2}$ ; il n'y aura plus ensuite qu'à voir pour combien de valeurs de $x$ elle peut prendre une valeur donnée à l'avance, $k$.

La fonction $y$ est bien définie pour toute valeur de $x$ autre que $-2$ ; on dit habituellement qu'elle devient infinie et discontinue pour $x = -2$ ; pour toute autre valeur de $x$ elle admet une dérivée qui est

$$y' = \frac{x(2x^2 + 7x + 4)}{(x + 2)^2}.$$

Cette dérivée change de signe pour trois valeurs de $x$ : $x = \dfrac{-7 - \sqrt{17}}{4}$, $-\dfrac{7 - \sqrt{17}}{4}$, et $0$ ; par conséquent en remarquant que $-2$ est compris entre les racines du trinome $2x^2 + 7x + 4 = 0$, que pour les trois valeurs signalées pour $x$ la fonction prend les valeurs $\dfrac{71 + 17\sqrt{17}}{8}$, $\dfrac{71 - 17\sqrt{17}}{8}$ et 0, le tableau des variations de la fonction $y$ est aisé à construire. Nous l'avons mis ci-dessous.

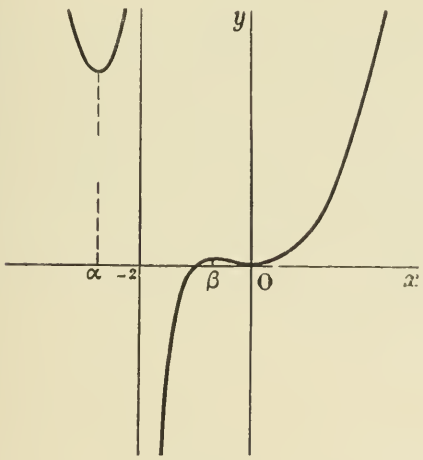


Fig. 1

| $x$ | $y'$ | $y$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | | $+\infty$ |
| | $-$ | décroît |
| $\alpha = -\dfrac{7 + \sqrt{17}}{4}$ | 0 | minim. $\dfrac{71 + 17\sqrt{17}}{8}$ |
| | $+$ | croît |
| $-2$ | | $+\infty$ |
| | | $-\infty$ |
| | $+$ | croît |
| $\beta = -\dfrac{7 - \sqrt{17}}{4}$ | 0 | max. $\dfrac{71 - 17\sqrt{17}}{8}$ |
| | $-$ | décroît |
| 0 | 0 | minim. 0 |
| | $+$ | croît |
| $+\infty$ | | $+\infty$ |

La courbe figurative des variations de cette fonction est alors immédiate, si l'on ne s'occupe pas des particularités géométriques qu'elle peut offrir. Nous la représentons plus haut dans la figure 1.

Si maintenant l'on se reporte à l'équation (1) on voit que les valeurs de $x$ qui conviennent sont celles pour lesquelles on a $y = k$. Elles correspondent donc aux points de rencontre de la courbe avec la droite $y = k$.

Il résulte immédiatement de là que si :

$k$ est plus grand que $\dfrac{71 + 17\sqrt{17}}{8}$, il y a trois valeurs de $x$ qui conviennent, une positive et deux négatives ;

$k$ est compris entre $\dfrac{71 - 17\sqrt{17}}{8}$ et $\dfrac{71 + 17\sqrt{17}}{8}$, il n'y a qu'une valeur acceptable pour $x$, une valeur positive ;

$k$ est compris entre 0 et $\frac{71-17\sqrt{17}}{8}$, il y a trois valeurs de $x$ qui conviennent, une positive et deux négatives ;

$k$ est négatif, il n'y a qu'une valeur acceptable pour $x$, une valeur négative.

Or nous avons posé $x = \frac{MA}{AD}$ ; donc à toute valeur positive de $x$ correspond un point M qui est de l'autre côté du point A que le point D, à toute valeur négative de $x$ correspond un point M qui est du même côté du point A que le point D. La discussion est complètement achevée par cette remarque.

2° Désignons par (ABC) l'aire du triangle ABC, nous aurons de suite $\frac{(MBC)}{(ABC)} = \frac{MD}{AD}$; puis $\frac{(MB'C')}{(MBC)} = \frac{MB'.MC'}{MB.MC}$. En multipliant les deux rapports précédents, nous aurons

$$\frac{(MB'C')}{(ABC)} = \frac{MD}{AD} \cdot \frac{MB'.MC'}{MB.MC}.$$

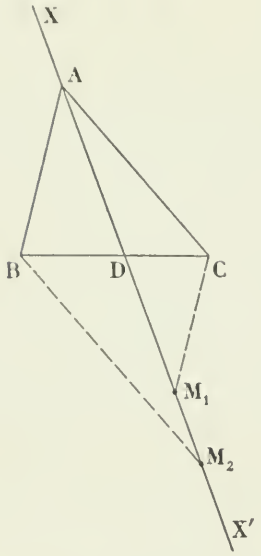


Fig. 2

Menons alors par le point C une parallèle à AB, $CM_1$, et soit $M_1$ son point de rencontre avec AD ; de même, par le point B, une parallèle à AC, $BM_2$, et soit $M_2$ son point de rencontre avec AD. Le rapport $\frac{MD}{AD}$ change de signe quand le point M passe au point D ; le rapport $\frac{MB'}{MB}$, quand le point M passe au point $M_2$ ; enfin le rapport $\frac{MC'}{MC}$, quand le point M passe au point $M_1$ (*fig.* 2). Le second membre de l'équation précédente est positif tant que le point M est sur la demi-droite DAX, négatif, quand le point M est entre D et $M_1$, positif, entre $M_1$ et $M_2$, et enfin, négatif, sur la demi-droite $M_2X'$. En prenant pour (ABC) un nombre positif égal à la valeur absolue de l'aire du triangle ABC et pour (MB'C') un nombre égal en valeur absolue à l'aire du triangle MB'C', mais positif ou négatif, suivant que le point M est sur DX ou $M_1M_2$ ou bien sur $DM_1$ ou $M_2X'$, l'égalité en question aura toujours lieu en grandeur et en signe.

Cela posé, les deux triangles BCC', BCB', coupés par la transversale AD, donnent

$$\frac{C'M}{CM} \cdot \frac{CD}{BD} \cdot \frac{BA}{C'A} = 1,$$

$$\frac{B'M}{BM} \cdot \frac{BD}{CD} \cdot \frac{CA}{B'A} = 1;$$

on déduit de là

$$\frac{MC'}{MC} \cdot \frac{MB'}{MB} = \frac{AB'.AC'}{AB.AC},$$

et, par suite,

$$\frac{(MB'C')}{(ABC)} = \frac{MD}{AD} \cdot \frac{AB'.AC'}{AB.AC}.$$

D'autre part, les deux triangles ABD et ADC coupés respectivement par les transversales CC' et BB', donnent

$$\frac{BC'}{AC'} \cdot \frac{AM}{DM} \cdot \frac{DC}{BC} = 1,$$

$$\frac{CB'}{AB'} \cdot \frac{AM}{DM} \cdot \frac{DB}{CB} = 1,$$

et l'on déduit de là $(BC' = BA + AC')$,

$$1 - \frac{AB}{AC'} = \frac{DM}{AM} \cdot \frac{BC}{DC},$$

$$1 - \frac{AC}{AB'} = \frac{DM}{AM} \cdot \frac{CB}{DB}.$$

En portant dans l'égalité qui donne $\frac{(MB'C')}{(ABC)}$ ou $\frac{(ABC)}{(MB'C')}$, on obtient de suite

$$\frac{AD}{MD}\left(1 - \frac{DM}{AM} \cdot \frac{BC}{DC}\right)\left(1 - \frac{DM}{AM} \cdot \frac{CB}{DB}\right) = \frac{1}{m},$$

ou
$$AD[AM.DC - BC(DA + AM)][AM.DB - CB(DA + AM)] = \frac{\overline{AM}^2.DC.DB(MA + AD)}{m},$$

ou enfin

$$AD(AM.DB - BC.DA)(AM.DC + BC.DA) = \frac{1}{m}\,\overline{AM}^2.DC.DB(MA + AD).$$

En posant $\frac{AM}{DA}$ ou $\frac{MA}{AD} = x$, on obtient l'équation demandée

$$-(x.DB - BC)(x.DC + BC) + \frac{x^2}{m} \cdot DC.DB(x + 1) = 0,$$

ou
$$-mx^2DB.DC + m\overline{BC}^2(x + 1) + DC.DB.x^2(x + 1) = 0.$$

Si l'on pose enfin $\frac{\overline{BC}^2}{DB.DC} = -h$, on a l'équation qui détermine le point M,

$$x^3 + (1 - m)x^2 - mh(x + 1) = 0. \qquad (2)$$

Mais on peut regarder aussi $m$ comme une fonction de $x$ donnée par cette équation du premier degré par rapport à $m$ et alors rien n'est plus simple que de trouver les valeurs de $x$ qui rendent $m$ maximum ou minimum : il suffit d'annuler la dérivée de cette fonction. On a ainsi successivement

$$m = \frac{x^3 + x^2}{x^2 + hx + h},$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{x^4 + 2hx^3 + 4hx^2 + 2hx}{(x^2 + hx + h)^2}.$$

Les valeurs cherchées pour $x$ sont donc $x = 0$ et les racines de l'équation

$$x^3 + 2hx^2 + 4hx + 2h = 0. \qquad (3)$$

Reste à étudier cette équation. Pour cela écrivons-la ainsi :

$$\frac{2x^2 + 4x + 2}{x^3} = -\frac{1}{h}$$

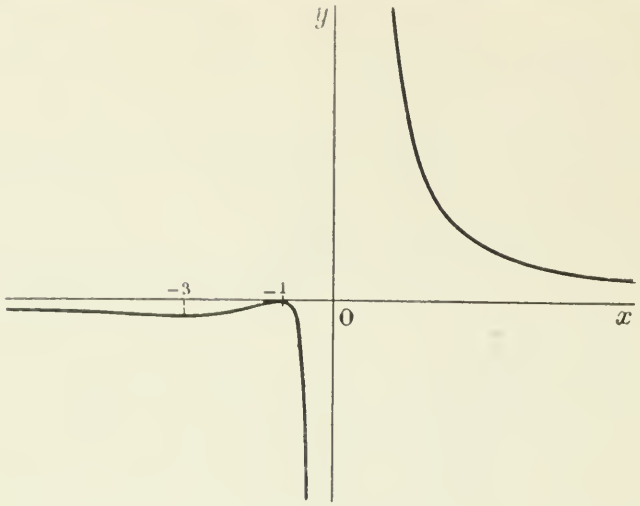
et étudions les variations de la fonction qui est dans le premier membre. Cette fonction est définie pour toute valeur de $x$, sauf pour $x = 0$ ; pour toutes ces valeurs elle admet une dérivée.

$$y' = \frac{-(2x^2 + 8x + 6)}{x^4};$$

cette dérivée est nulle pour $x = -1$ et pour $x = -3$.

Le tableau des variations de la fonction se construit immédiatement ainsi que la courbe qui

représente ces variations. Nous donnons ci-dessous ces deux éléments principaux de la discussion.




| $x$ | $y'$ | $y$ |
|---|---|---|
| $-\infty$ | | 0 |
| | — | décroît |
| $-3$ | 0 | min. $-\frac{8}{27}$ |
| | + | croît |
| $-1$ | 0 | 0 max. |
| | — | décroît |
| 0 | | $-\infty$ / $+\infty$ |
| | — | décroît |
| $+\infty$ | | 0 |

Pour avoir les valeurs de $x$ qui conviennent il faut couper cette courbe par la droite $y = -\frac{1}{h}$, et l'on voit de suite que si :

$h$ est négatif, il y a une seule valeur de $x$ qui convient et cette valeur est positive ;

$h$ est positif et plus grand que $\frac{27}{8}$, il y a trois valeurs acceptables pour $x$, toutes trois négatives ;

$h$ est positif et plus petit que $\frac{27}{8}$, il y a une seule valeur de $x$ qui convient et elle est négative.

Dans le cas où le point D est au milieu de BC, on a $DC = -DB = \frac{BC}{2}$; par suite $h = 4$, et l'équation (3) devient

$$x^3 + 8x^2 + 16x + 8 = 0;$$

elle admet la racine $-2$ et s'abaisse alors à l'équation

$$x^2 + 6x + 4 = 0,$$

qui a les deux racines $-3 - \sqrt{5}$ et $-3 + \sqrt{5}$.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**413.** — 1° On donne la courbe

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0,$$

et on demande de construire cette courbe en supposant $a$ positif.

2° On joint l'origine à un point quelconque de cette courbe, M, et on trace la symétrique de OM par rapport à la bissectrice du premier angle des axes ; soit (D) cette droite ; on élève ensuite au point M à OM une perpendiculaire qui rencontre la droite (D) en un point I, et on demande le lieu du point I.

3° Sur OI on prend $OI' = MI$ ; trouver le lieu du point I'.

**414.** — Soit un angle XOY et un point P de son plan. Par les points O et P on fait passer une circonférence de cercle variable coupant les côtés de l'angle aux points A et B. Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle ABO. (Louis Espinat, à Espinchals.)

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 9 Juin 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LE CYLINDROÏDE

Par **M. P. Appell**, membre de l'Institut.

Il est évident que le lieu des projections d'un point fixe quelconque sur les génératrices d'un cylindre est une courbe plane. Il existe un conoïde droit, signalé par Plücker et par Cayley, qui possède la même propriété et qu'on a nommé, pour cette raison, cylindroïde.

Pour obtenir son équation, nous allons résoudre la question suivante :

*Trouver un conoïde droit tel que le lieu des projections d'un point quelconque sur ses génératrices, soit une courbe plane.*

Prenons pour axe $Oz$ la directrice rectiligne du conoïde et pour plan $xOy$ le plan directeur, supposé perpendiculaire à $Oz$. Les équations d'une génératrice peuvent s'écrire

$$y = mx, \qquad z = \varphi(m),$$

ou encore, en désignant par $\psi(m)$ une fonction convenablement choisie,

$$(1) \qquad y = mx, \qquad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2}.$$

Prenons un point quelconque $(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'espace : le plan projetant ce point sur la génératrice est

$$(2) \qquad x - \alpha + m(y - \beta) = 0.$$

Les coordonnées de la projection du point $\alpha, \beta, \gamma$ sur la génératrice s'obtiennent en résolvant les équations (1) et (2) :

$$(3) \qquad x = \frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \qquad y = m\frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \qquad z = \frac{\psi(m)}{1+m^2}.$$

Quel que soit $m$, ce point doit être dans un plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

dont les coefficients sont fonctions de $\alpha, \beta, \gamma$. On a donc

$$(4) \qquad (A + mB)(\alpha + m\beta) + C\psi(m) + D(1+m^2) = 0.$$

Cette relation doit avoir lieu *identiquement* quels que soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ et $m$ ; donc, en donnant à $\alpha, \beta, \gamma$ des valeurs constantes, d'ailleurs arbitraires, on voit que $\psi(m)$ est nécessairement, d'après (4), une fonction du second degré de $m$,

$$\psi(m) = am^2 + bm + c,$$

$a$, $b$, $c$ désignant des constantes. D'ailleurs cette forme nécessaire de $\psi(m)$ est suffisante, comme nous allons le vérifier en montrant que le conoïde défini par

$$y = mx, \qquad z = \frac{am^2 + bm + c}{1+m^2}$$

possède la propriété demandée. Ce conoïde a pour équation

$$z = \frac{ay^2 + bxy + cx^2}{x^2 + y^2}.$$

On peut simplifier cette équation de la façon suivante. Transportons d'abord l'origine en un point O, $z = \lambda$, de l'axe des $z$. Nous aurons $z = \lambda + z'$ et la nouvelle équation sera

$$z' = \frac{(a-\lambda)y^2 + bxy + (c-\lambda)x^2}{x^2+y^2}.$$

On peut déterminer $\lambda$ de façon que la forme quadratique du numérateur, égalée à zéro, représente deux droites rectangulaires $O'x'$ et $O'y'$; il suffit pour cela de faire

$$a + c - 2\lambda = 0.$$

La constante $\lambda$ étant ainsi déterminée, on peut prendre pour nouveaux axes des $x'$ et des $y'$ ces deux droites $O'x'$ et $O'y'$: l'équation prend alors la forme

$$z' = \frac{2kx'y'}{x'^2+y'^2},$$

$k$ désignant une constante. C'est là, sous sa forme la plus simple, l'équation du *cylindroïde*.

La propriété caractéristique est alors aisée à vérifier. Les coordonnées de la projection d'un point $(\alpha, \beta, \gamma)$ de l'espace sur une génératrice de ce conoïde sont, en supprimant les accents,

$$x = \frac{\alpha + m\beta}{1+m^2}, \qquad y = \frac{m(\alpha+m\beta)}{1+m^2}, \qquad z = \frac{2km}{1+m^2}.$$

En exprimant que ce point est, quel que soit $m$, dans le plan

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

on a

$$(A + mB)(\alpha + m\beta) + 2kCm + D(1+m^2) = 0.$$

D'où, en égalant à zéro les coefficients de $m^2$, $m$ et le terme constant,

$$A = -\frac{D}{\alpha}, \qquad B = -\frac{D}{\beta},$$

$$C = -\frac{A\beta + B\alpha}{2k} = \frac{D(\alpha^2+\beta^2)}{2k\alpha\beta}.$$

Le lieu des projections du point $\alpha, \beta, \gamma$ sur les génératrices est donc dans le plan

$$\beta x + \alpha y - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2k} z - \alpha\beta = 0.$$

Ce lieu est d'ailleurs une conique, comme on le vérifie immédiatement.

Exercice. — *Lieu des perpendiculaires communes à l'axe des $z$ et à une droite variable rencontrant l'axe des $x$ en un point fixe et située dans le plan bissecteur $y = z$.*

---

# ÉTUDE D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

## AUTOUR D'UN POINT A DISTANCE FINIE

Par M. **H. Andoyer**, chargé d'un cours à la faculté des sciences de Paris.

---

Je ne crois pas inutile d'exposer encore une fois cette question ; la méthode que je vais indiquer est due à M. Weierstrass : elle est d'une application simple et facile et me paraît tout à fait propre à pénétrer dans l'enseignement classique. Son principe est absolument distinct de celui qui caractérise la méthode de Puiseux, si délicate à exposer convenablement à des élèves de mathématiques spéciales et, en vérité, je crois que l'étude d'une courbe autour d'un point et l'étude des racines infiniment petites d'une équation sont des problèmes différents ; j'espère le montrer clairement dans ce qui suivra.

**1.** Soit $F(X, Y) = 0$ une équation entière, à coefficients réels, de degré $m$ en X et Y représentant une courbe algébrique C de degré $m$, rapportée à deux axes de coordonnées cartésiennes OX, OY. Soit $(X_0, Y_0)$ un point réel $o$ de la courbe, situé à distance finie ; si nous prenons pour axes de coordonnées les droites $ox$, $oy$ respectivement parallèles à OX et OY et de même sens, l'équation de la courbe C deviendra

$$0 = f(x, y) = F(x + X_0, y + Y_0).$$

Si $p$ est tel que toutes les dérivées partielles de F d'ordre inférieur à $p$ soient nulles quand on y fait $X = X_0$, $Y = Y_0$, et qu'il n'en soit pas de même des dérivées partielles d'ordre $p$, on pourra écrire

$$(1) \qquad 0 = f(x, y) = f_p(x, y) + f_{p+1}(x, y) + \cdots + f_m(x, y),$$

où $f_q(x, y)$ désigne d'une façon générale l'ensemble homogène des termes de $f$ qui sont de degré $q$ en $x$ et $y$, et où $f_p(x, y)$ n'est pas nul identiquement.

$f(x, y)$ est une fonction entière de degré $m$ à coefficients réels comme $F(X, Y)$.

Le point $o$ est un *point multiple d'ordre* $p$ de C. Une droite quelconque passant en $o$ coupe la courbe C en $p$ points confondus en $o$ et $p$ seulement, si elle ne fait pas partie du faisceau $f_p(x, y) = 0$ ; si au contraire elle fait partie de ce faisceau, elle coupe la courbe en plus de $p$ points confondus en $o$ ; pour cette raison, les droites du faisceau $f_p(x, y) = 0$ sont appelées les *tangentes* à la courbe en $o$ ; elles sont en nombre $p$, distinctes ou confondues, réelles ou imaginaires.

Mettant en évidence les diverses tangentes distinctes au point $o$, nous écrirons

$$f_p(x, y) = A(\alpha_1 x + \beta_1 y)^{p_1}(\alpha_2 x + \beta_2 y)^{p_2} \ldots (\alpha_r x + \beta_r y)^{p_r} = A\Pi(\alpha_i x + \beta_i y)^{p_i},$$

et l'on aura $\Sigma p_i = p$ ; $\alpha_i$ et $\beta_i$ sont deux quantités finies dont l'une au moins n'est pas nulle ; les quantités telles que $\alpha_i\beta_j - \alpha_j\beta_i$ ne sont pas nulles, si l'on suppose $i \neq j$ ; A est une constante.

Nous supposerons la courbe C *indécomposable*, c'est-à-dire que le polynome $F(X, Y)$ n'est pas un produit de polynomes de moindre degré ; il en est de même alors évidemment de $f(x, y)$. Il en résulte, en particulier, que si l'on considère $x$ comme la variable et $y$ comme un paramètre, $f(x, y)$ est premier avec la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}$ ; si en effet, il n'en était pas ainsi, ces polynomes en $x$ auraient un plus grand commun diviseur qui pourrait se mettre sous la forme $P(x, y)Q(y)$, P étant un polynome entier en $x$ et $y$ ne contenant aucun facteur qui soit un polynome en $y$ seul, et Q étant une fraction rationnelle en $y$ ; il est clair alors que la courbe représentée par l'équation $P(x, y) = 0$ ferait partie de la courbe C, ce qui est contraire à l'hypothèse.

De même, si l'on considère $y$ comme la variable et $x$ comme un paramètre, $f(x, y)$ est premier avec la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial y}$.

**2.** — Étudier la courbe C autour du point $o$, c'est étudier les systèmes de valeurs infiniment petites réelles de $x$ et $y$ qui vérifient l'équation $f(x, y) = 0$, et construire les branches de courbe correspondantes.

Soit $(x, y)$ un tel système et M le point correspondant ; appelons $\lambda$, $\mu$ les paramètres directeurs de la demi-droite OM, et dans l'équation (1) faisons

$$x = \lambda\rho, \qquad y = \mu\rho.$$

L'équation en $\rho$ ainsi obtenue

$$0 = \rho^p f_p(\lambda, \mu) + \rho^{p+1} f_{p+1}(\lambda, \mu) + \cdots + \rho^m f_m(\lambda, \mu)$$

aura, outre $p$ racines nulles, au moins une racine infiniment petite égale à la distance OM : donc $f_p(\lambda, \mu)$ est une quantité infiniment petite, et comme

$$f_p(\lambda, \mu) = A\Pi(\alpha_i\lambda + \beta_i\mu)^{p_i},$$

l'une des quantités $\alpha_i\lambda + \beta_i\mu$ est infiniment petite : toutes les autres restent d'ailleurs nécessairement finies.

Soit $\alpha_1\lambda + \beta_1\mu$ le facteur qui devient infiniment petit : il faut nécessairement que le rapport $\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ soit réel, et par suite, nous voyons que les points de la courbe infiniment voisins de l'origine se trouvent répartis en groupes distincts, les rayons vecteurs des points d'un même groupe étant infiniment voisins de l'une des tangentes réelles de la courbe à l'origine.

On est donc amené à étudier successivement les groupes qui correspondent à chaque tangente réelle. Soit $\alpha_1 x + \beta_1 y = 0$ l'équation d'une telle tangente de degré $p_1$ de multiplicité supérieur à l'unité : en appelant $a_1$ et $b_1$ deux coefficients constants réels, arbitrairement choisis, de façon toutefois que l'on ait $a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 \neq 0$, les coordonnées d'un point réel appartenant au groupe de la tangente considérée peuvent s'écrire sous la forme

$$x = x'(-\beta_1 + a_1 y'),$$
$$y = x'(\alpha_1 + b_1 y'),$$

$x'$ et $y'$ étant deux nouvelles variables réelles infiniment petites.

Si nous remplaçons $x$ et $y$ par ces valeurs dans l'équation (1), elle devient, après division par $x'^p$,

$$(2) \qquad 0 = f'(x', y') = A(a_1\alpha_1 + b_1\beta_1)^{p_1} y'^{p_1} f'_{p-p_1}(y') + x' f'_{p+1}(y') + \cdots + x'^{m-p} f'_m(y')$$

où $f'_{p-p_1}(y'), f'_{p+1}(y'), \ldots, f'_m(y')$ sont des polynomes en $y'$ des degrés marqués par leurs indices, et où l'on a $f'_{p-p_1}(0) \neq 0$.

Si $x'$ et $y'$ sont les coordonnées d'un point, cette équation représente une nouvelle courbe C′, indécomposable comme la courbe C, et qui présente à l'origine un point multiple d'ordre 1 au moins, $p_1$ au plus.

Les deux courbes C et C′ se correspondent manifestement point par point, et, en particulier, au groupe de points considéré de la courbe C correspondent les points réels de la courbe C′ qui sont infiniment voisins de l'origine. Le groupe considéré se partage donc lui-même en autant de groupes partiels que la courbe C′ a de tangentes réelles distinctes à l'origine.

Si d'ailleurs on modifiait les constantes $a_1$ et $b_1$, si on faisait par exemple la transformation

$$x = X'(-\beta_1 + A_1 Y') \qquad A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 \neq 0,$$
$$y = X'(\alpha_1 + B_1 Y')$$

on obtiendrait au lieu de C′ une autre courbe K′, et ces deux courbes auraient à l'origine un point de même ordre de multiplicité, les tangentes étant disposées de la même façon : on passe, en effet, de C′ à K′ par la transformation

$$x' = X' + \frac{a_1 B_1 - b_1 A_1}{a_1\alpha_1 + b_1\beta_1} X'Y', \qquad y' = \frac{(A_1\alpha_1 + B_1\beta_1)Y'}{a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 + (a_1 B_1 - b_1 A_1)Y'},$$

dont la forme rend évidente la propriété annoncée.

Considérons un groupe partiel correspondant à une tangente réelle de C′ d'ordre de multiplicité supérieur à l'unité. Pour l'étudier, on fera une transformation analogue à celle que nous avons faite sur C : on sera ainsi conduit à une nouvelle courbe C″ indécomposable qui passera encore à l'origine, et le groupe partiel considéré se partagera à son tour en autant de nouveaux groupes partiels que la courbe C″ a de tangentes réelles distinctes à l'origine. Si l'on avait transformé K′, on aurait obtenu une courbe K″ ayant ses tangentes à l'origine disposées comme celles de C″, ainsi qu'on le vérifie aisément.

Si l'un des nouveaux groupes partiels correspond à une tangente réelle de C″ d'ordre de multiplicité supérieur à l'unité, on l'étudiera en transformant encore C″ comme nous avons transformé C′ ; et ainsi de suite.

Nous allons faire voir qu'au bout d'un nombre limité d'opérations, tous les points de C infiniment voisins de l'origine se trouvent répartis en groupes partiels appelés *cycles*, tels que chacun d'eux corresponde à une tangente *simple* réelle d'une certaine courbe $C^{(k)}$, obtenue après $k$ transformations successives analogues aux précédentes.

Si, en effet, il n'en était pas ainsi, il faudrait, qu'à partir d'un certain moment, et l'on peut supposer dans la démonstration que ce soit dès le début, les courbes successives C, C′, C″,. . eussent à l'origine des points multiples de même ordre de multiplicité $p$, sans que cet ordre puisse jamais s'abaisser. Supposons qu'il en soit ainsi pour les courbes C, C′, C″,..., $C^{(k-1)}$ ; nous allons faire voir que le nombre $k$ a une limite supérieure, ce qui démontrera la proposition annoncée.

Puisque la courbe C′ a à l'origine un point multiple d'ordre $p$, il faut que l'on ait $p_1 = p$ ; et si l'on suppose que la tangente $\alpha_1 x + \beta_1 y = 0$ ne coïncide pas avec $Oy$ (s'il n'en était pas ainsi, on intervertirait dans ce qui suit les rôles des lettres $x$ et $y$ et des lettres correspondantes, ce qu'on pourra d'ailleurs faire encore si $\alpha_1$ n'est pas nul), on peut écrire

$$f(x, y) = (y - tx)^p + \ldots\ldots$$

Pour obtenir C′, nous ferons la transformation simple

$$x = x',$$
$$y = x'(t + y'),$$

et l'équation $f'(x', y') = 0$ de C′ sera définie par

$$f(x, y) = x'^p f'(x', y').$$

Le terme en $y'^p$ dans $f'(x', y')$ est précisément $y'^p$, et par suite, d'après l'hypothèse, on peut écrire

$$f'(x', y') = (y' - t'x')^p + \ldots\ldots$$

On passera de même à C″, d'équation $f''(x'', y'') = 0$ par la transformation

$$x' = x'',$$
$$y' = x''(t' + y''),$$

et l'on aura

$$f'(x', y') = x''^p f''(x'', y''),$$
$$f''(x'', y'') = (y'' - t''x'')^p + \ldots\ldots$$

et ainsi de suite.

La courbe $C^{(k-1)}$ d'équation $f^{(k-1)}(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}) = 0$, est de même définie par les relations

$$x^{(k-2)} = x^{(k-1)},$$
$$y^{(k-2)} = x^{(k-1)}(t^{(k-2)} + y^{(k-1)}),$$
$$f^{(k-2)}(x^{(k-2)}, y^{(k-2)}) = (x^{(k-2)})^p f^{(k-1)}(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}),$$
$$f^{(k-1)}(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}) = (y^{(k-1)} - t^{(k-1)}x^{(k-1)})^p + \ldots$$

Si nous faisons encore la transformation

$$x^{(k-1)} = x^{(k)},$$
$$y^{(k-1)} = x^{(k)}(t^{(k-1)} + y^{(k)}),$$

nous obtenons la courbe $C^{(k)}$, dont l'équation est $f^{(k)}(x^{(k)}, y^{(k)}) = 0$, définie par

$$f^{(k-1)}(x^{(k-1)}, y^{(k-1)}) = (x^{(k)})^p f^{(k)}(x^{(k)}, y^{(k)}) ;$$

nous ne faisons d'ailleurs aucune hypothèse sur la disposition de la courbe $C^{(k)}$ à l'origine.

Les relations précédentes donnent

$$x = x' = x'' = \ldots = x^{(k-1)} = x^{(k)},$$
$$y = tx + t'x^2 + t''x^3 + \ldots + t^{(k-1)}x^k + y^{(k)}x^k,$$
$$f(x, y) = x^{kp} f^{(k)}(x, y^{(k)}) ;$$

par suite, on a

$$\frac{\partial y^{(k)}}{\partial y} = \frac{1}{x^k},$$
$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = x^{k(p-1)} \frac{\partial f^{(k)}(x, y^{(k)})}{\partial y^{(k)}}.$$

Mais d'après ce qui a été dit plus haut, les polynomes $f(x, y)$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$, où l'on considère $y$ comme la variable et $x$ comme un paramètre, sont premiers entre eux ; on peut donc déterminer des

polynomes P et Q en $x$ et $y$, et un polynome R en $x$ seul, tels que l'on ait identiquement

$$Pf(x, y) + Q\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = R(x).$$

On peut supposer que P, Q, R n'aient pas en commun le facteur $x$ ; appelons alors $h$ l'exposant de la plus haute puissance de $x$ qui divise $R(x)$ : le premier membre de l'identité précédente sera divisible par $x^h$, mais ne le sera pas par une puissance supérieure de $x$.

Si maintenant on y remplace $y$ par sa valeur en fonction de $x$ et de $y^{(k)}$, il en sera encore de même ; or, les valeurs précédemment écrites pour $f(x, y)$ et $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ montrent que ce premier membre contiendra alors en facteur une puissance de $x$ dont l'exposant sera au moins égal à $k(p-1)$ ; on a donc nécessairement

$$k(p-1) \leqslant h, \qquad \text{ou} \qquad k \leqslant \frac{h}{p-1},$$

et comme $h$ est un nombre parfaitement déterminé, on voit bien que $k$ a une limite supérieure.

3. — Étudions maintenant un cycle en particulier.

La courbe C a une tangente multiple réelle $\alpha x + \beta y = 0$ : nous posons, en modifiant un peu les notations précédentes,

$$(s) \qquad \begin{cases} x = x_1(-\beta + ay_1) \\ y = x_1(\alpha + by_1) \end{cases} \qquad a\alpha + b\beta \neq 0 ;$$

la courbe $C_1$ ainsi obtenue a une tangente multiple réelle $\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 = 0$ ; nous posons encore

$$(s_1) \qquad \begin{cases} x_1 = x_2(-\beta_1 + a_1 y_2) \\ y_1 = x_2(\alpha_1 + b_1 y_2) \end{cases} \qquad a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 \neq 0 ;$$

et ainsi de suite.

La courbe $C_{k-1}$ a encore une tangente multiple réelle $\alpha_{k-1}x_{k-1} + \beta_{k-1}y_{k-1} = 0$ ; nous posons

$$(s_{k-1}) \qquad \begin{cases} x_{k-1} = x_k(-\beta_{k-1} + a_{k-1}y_k) \\ y_{k-1} = x_k(\alpha_{k-1} + b_{k-1}y_k) \end{cases} \qquad a_{k-1}\alpha_{k-1} + b_{k-1}\beta_{k-1} \neq 0,$$

et la courbe $C_k$ ainsi obtenue a une tangente simple réelle $\alpha_k x_k + \beta_k y_k = 0$ : nous nous proposons d'étudier le cycle de C qui correspond à cette tangente.

L'équation de $C_k$ est de la forme

$$(\alpha_k x_k + \beta_k y_k)\varphi_{q-1}(x_k, y_k) + \varphi_{q+1}(x_k, y_k) + \cdots + \varphi_n(x_k, y_k) = 0,$$

si cette courbe est de degré $n$, et a à l'origine un point multiple d'ordre $q$ ; $\varphi_{q-1}(x_k, y_k)$, $\varphi_{q+1}(x_k, y_k)$, .... sont des polynomes homogènes en $x_k$ et $y_k$ des degrés marqués par leurs indices ; $\varphi_{q-1}(x_k, y_k)$ n'admet pas le facteur $\alpha_k x_k + \beta_k y_k$. Il faut étudier les points de cette courbe infiniment voisins de l'origine et qui correspondent à la tangente $\alpha_k x_k + \beta_k y_k$. Posons encore

$$(s_k) \qquad \begin{cases} x_k = t(-\beta_k + a_k\theta) \\ y_k = t(\alpha_k + b_k\theta) \end{cases} \qquad a_k\alpha_k + b_k\beta_k \neq 0 ;$$

après cette substitution et division par $t^q$, on obtient une équation de la forme

$$(3) \qquad \theta = \psi_0(t) + \theta\psi_1(t) + \theta^2\psi_2(t) + \ldots\ldots,$$

où $\psi_0(t)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$, ... désignent des polynomes entiers en $t$, les deux premiers s'annulant avec $t$, et le premier $\psi_0(t)$ n'étant pas nul identiquement.

Il est clair que tout revient à étudier les valeurs réelles de $t$ et $\theta$ qui sont simultanément infiniment petites.

Or, pour $t = 0$, l'équation (3), en $\theta$, admet une seule racine nulle ; donc, d'après un théorème

d'algèbre bien connu, pour une valeur infiniment petite et réelle de $t$, elle admettra une seule racine $\theta$ infiniment petite nécessairement réelle. Si d'ailleurs $\psi_0(t)$ ordonné suivant les puissances croissantes de $t$ commence par un terme $h_s t^s$, il est clair que la partie principale de $\theta$ sera précisément $h_s t^s$ ; en posant

$$\theta = h_s t^s + \theta',$$

l'équation (3) se changera en une équation de même forme en $\theta'$, et l'on pourra sans difficulté déterminer la partie principale de $\theta'$. En continuant de la même façon, on obtiendra le développement de $\theta$, poussé aussi loin qu'on le voudra, procédant suivant les puissances entières croissantes de $t$, sous la forme

$$\theta = h_s t^s + h_{s+1} t^{s+1} + \cdots + h_{s+r} t^{s+r}(1 + \theta_1),$$

les coefficients $h_s$ et $h_{s+r}$ n'étant pas nuls, et $\theta_1$ étant une fonction de $t$, infiniment petite et réelle en même temps que $t$ qui n'a qu'une seule valeur.

En portant cette valeur de $\theta$ dans les formules $(s_k)$, puis les valeurs ainsi obtenues pour $x_k$ et $y_k$ dans les formules $(s_{k-1})$, et ainsi de suite, on voit que finalement on obtiendra les valeurs des coordonnées $x$ et $y$ d'un point appartenant au cycle considéré, développées aussi loin qu'on le voudra suivant les puissances entières et croissantes du paramètre $t$, sous la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} x = l_p t^p + l_{p+1} t^{p+1} + \cdots + l_{p+p'} t^{p+p'}(1 + \xi) \\ y = m_q t^q + m_{q+1} t^{q+1} + \cdots + m_{q+q'} t^{q+q'}(1 + \eta), \end{cases}$$

les coefficients $l_p$, $l_{p+p'}$, $m_q$, $m_{q+q'}$ n'étant pas nuls, et $\xi$, $\eta$ étant des fonctions de $t$ infiniment petites et réelles en même temps que $t$, n'ayant chacune qu'une seule valeur : les coefficients $l$ et $m$ sont d'ailleurs réels.

En procédant de la même façon pour chacun des cycles de C, on représentera chacun de ces cycles par des formules telles que (4).

4. — Construisons maintenant le cycle représenté par les équations (4). Ce cycle est représenté par deux branches distinctes correspondant, l'une aux valeurs positives infiniment petites de $t$, l'autre aux valeurs négatives : ces deux branches sont nécessairement distinctes, car elles correspondent point par point aux deux branches évidemment distinctes du cycle simple de l'équation (3), où l'on suppose que $t$ et $\theta$ sont les coordonnées d'un point,

$$\theta = h_s t^s + \ldots\ldots + h_{s+r} t^{s+r}(1 + \theta_1).$$

Si $p$ est différent de $q$, les deux premiers termes $l_p t^p$ et $m_q t^q$ des développements de $x$ et $y$ suffi-

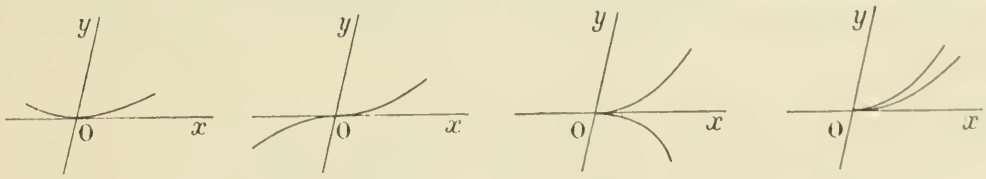



Fig. 1. Fig. 2. Fig. 3. Fig. 4.

sent pour déterminer la forme du cycle. Supposons par exemple $p < q$ : on aura évidemment quatre formes différentes représentées sur les figures 1, 2, 3, 4 et correspondant respectivement aux cas de : 1° $p$ impair, $q$ pair; 2° $p$ impair, $q$ impair ; 3° $p$ pair, $q$ impair; 4° $p$ pair, $q$ pair.

Si l'on a $p > q$, rien n'est changé : l'axe des $y$ remplace l'axe des $x$.

Si l'on a $p = q$, la tangente au cycle au lieu d'être l'axe des $x$ ou l'axe des $y$ est la droite OT d'équation $m_p x - l_p y = 0$; au lieu des équations (4) on écrira

$$(5) \qquad \begin{cases} x = l_p t^p + \cdots + l_{p+p'} t^{p+p'}(1 + \xi) \\ m_p x - l_p y = n_r t^r + \cdots + n_{r+r'} t^{r+r'}(1 + \zeta) \end{cases}$$

analogues aux précédentes, et $r$ étant supérieur à $p$, on obtiendra les mêmes formes que précédemment.

En résumé, les points infiniment voisins de l'origine sur la courbe C forment un certain nombre de cycles, et chacun de ces cycles a l'une des formes indiquées par les figures précédentes.

Lorsque deux cycles ont la même tangente, il sera toujours facile de les placer l'un par rapport à l'autre. Supposons, ce qu'on peut toujours faire d'après ce qui précède, que la tangente commune soit l'axe des $x$. Les deux cycles sont alors représentés par des équations telles que (4) où $p < q$ et

$$(4') \qquad \begin{cases} x = h_r t^r + \cdots + h_{r+r'} t^{r+r'}(1+\xi') \\ y = k_s t^s + \cdots + k_{s+s'} t^{s+s'}(1+\eta') \end{cases}$$

analogues aux équations (4), et où l'on a aussi $s > r$.

Si l'on prend $x$ comme infiniment petit principal, la partie principale de $y$ est pour le premier cycle $m_q\left(\frac{x}{l_p}\right)^{\frac{q}{p}}$ et pour le second $k_s\left(\frac{x}{h_r}\right)^{\frac{s}{r}}$. Si ces parties principales ne sont pas égales, on voit immédiatement quelle est la disposition relative des deux cycles ; si elles sont égales à une même quantité $y$, on cherchera pour chacun des deux cycles la partie principale de la différence $y - y_1$; et ainsi de suite. Au bout d'un nombre limité d'opérations, les deux cycles se sépareront l'un de l'autre, car ils sont distincts, puisqu'ils correspondent point par point à des points évidemment distincts d'une des courbes transformées $C^{(k)}$.

5. — Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple. Nous remarquerons tout d'abord que dans la pratique, les substitutions telles que $(s)$, $(s_1)$, . . pourront être beaucoup simplifiées. Si par exemple $\beta$ est différent de zéro, on peut le prendre égal à $-1$, et écrire au lieu des formules $(s)$ :

$$x = x_1,$$
$$y = x_1(\alpha + y_1),$$

ou simplement

$$y = x(\alpha + y_1),$$

et ainsi de suite.

Soit à chercher aux environs de l'origine la forme de la courbe

$$(y-2x)^5 + (y-2x)^2(y^4+x^4) + y^7 = 0.$$

(Pruvost, *Géom. Analyt.*)

On fait

$$y = x(2+y_1),$$

et l'on obtient

$$y_1^5 + xy_1^2((2+y_1)^4+1) + x^2(2+y_1)^7 = 0.$$

Cette courbe a à l'origine un point double et les tangentes y sont confondues avec l'axe des $y$. On fait donc

$$x = x_1 y_1,$$

et il vient

$$y_1^3 + x_1 y_1((2+y_1)^4+1) + x_1^2(2+y_1)^7 = 0.$$

Cette courbe a à l'origine un point double à tangentes distinctes ; donc la courbe proposée présente à l'origine deux cycles correspondants à ces deux tangentes.

Le premier cycle correspond à la tangente

$$128x_1 + 17y_1 = 0,$$

et donne par suite, en faisant $y_1 = t$,

$$x_1 = -\frac{17}{128}\, y_1(1+\xi_1),$$

d'où

$$\begin{cases} x = -\dfrac{17}{128}\, y_1^2(1+\xi), \\ y - 2x = -\dfrac{17}{128}\, y_1^3(1+\eta). \end{cases}$$

Le second cycle correspond à la tangente $x_1 = 0$; en supposant $y_1 = t$, on posera $x_1 = y_1 x_2$; il vient alors :

$$y_1 + x_2((2 + y_1)^4 + 1) + x_2^2(2 + y_1)^7 = 0;$$

on voit que

$$x_2 = -\frac{y_1}{17}(1 + \xi_2),$$

$$x_1 = -\frac{y_1^2}{17}(1 + \xi_1),$$

et par suite

$$\begin{cases} x = -\dfrac{y_1^3}{17}(1 + \xi), \\ y - 2x = -\dfrac{y_1^4}{17}(1 + \eta). \end{cases}$$

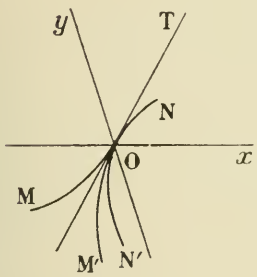


Fig. 5.

Ces deux cycles se construisent aisément : au premier correspondent les deux branches OM, OM'; au second les deux branches ON, ON' (*fig.* 5). La branche ON' est placée au-dessous de la branche OM', car pour le premier cycle la partie principale de $y - 2x$ est d'ordre $\frac{3}{2}$ par rapport à $x$, tandis que pour le second cycle cette partie principale est d'ordre $\frac{4}{3}$ seulement.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**389.** — *On considère les coniques osculatrices à un cercle donné en un point* O, *et telles que l'un des foyers,* F, *soit sur le cercle, et on demande :*

1° *Le lieu du second foyer,* F', *de ces coniques ;*

2° *Le lieu de leurs centres ;*

3° *L'enveloppe des axes focaux ;*

4° *Le lieu des sommets situés sur les axes focaux.*

Nous prendrons pour axe des $x$ la tangente au cercle au point O, pour axe des $y$, le diamètre du cercle normal à cette tangente et dirigé vers le centre. Si alors nous désignons par $a$ l'ordonnée du centre, c'est-à-dire le rayon, le cercle a pour équation ponctuelle

$$x^2 + y^2 - 2ay = 0,$$

et pour équation tangentielle

$$-a^2u^2 + 2avw + w^2 = 0.$$

Nous aurons l'équation tangentielle des coniques cherchées en exprimant qu'elle admet la solution $u = 0$, $v = 1$, $w = 0$, que le point de contact de cette droite $\left(\frac{\partial f}{\partial v} = 0\right)$ coïncide avec le point O, et enfin que l'ombilic relatif au cercle et à la conique, et associé au point O, est sur l'axe des $x$. Nous obtenons ainsi

$$Au^2 + 2Buw - \frac{2A}{a}vw + Cw^2 = 0.$$

Désignons alors par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées cartésiennes du foyer qui décrit le cercle donné, par $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ un système de coordonnées homogènes ordinaires du foyer associé ; l'ensemble de ces deux points constitue une conique qui fait partie du système des coniques homofocales à la conique cherchée : on doit donc avoir, pour une certaine valeur de $\lambda$, l'identité suivante :

$$Au^2 + 2Buw - \frac{2A}{a}vw + Cw^2 + \lambda(u^2 + v^2) = (\alpha u + \beta v + w)(\alpha' u + \beta' v + \gamma' w).$$

Cette identité se traduit par les six équations

$$\alpha\alpha' = A + \lambda, \qquad \alpha\beta' + \beta\alpha' = 0,$$
$$\beta\beta' = \lambda, \qquad \alpha\gamma' + \alpha' = 2B,$$
$$\gamma' = C, \qquad \beta\gamma' + \beta' = -\frac{2A}{a};$$

celles de la première colonne donnent de suite $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$ en fonction des autres lettres ; en portant ces valeurs dans les trois autres, et tenant compte de la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta = 0$, on obtient

$$\lambda = -\frac{A\beta}{2a}, \qquad B = -\frac{A\alpha}{2a\beta}, \qquad C = -\frac{3A}{2a\beta},$$

et

$$\alpha' = \frac{A\alpha}{2a\beta}, \qquad \beta' = -\frac{A}{2a}, \qquad \gamma' = -\frac{3A}{2a\beta}.$$

Des valeurs trouvées pour B et C, on déduit de suite l'équation de la conique,

$$f(u, v, w) = -2a\beta u^2 + 2\alpha uw + 4\beta vw + 3w^2 = 0, \tag{1}$$

à laquelle il faut ajoindre la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta = 0$.

1° Désignons alors par $x$, $y$, $z$ les coordonnées homogènes du second foyer, et par $\theta$ un certain facteur : nous aurons

$$\theta x = \frac{\alpha}{\beta}, \qquad \theta y = -1, \qquad \theta z = -\frac{3}{\beta}.$$

L'élimination de $\alpha$, $\beta$ et $\theta$ entre ces trois équations et la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta = 0$ est très simple et conduit au lieu du second foyer; on obtient ainsi le cercle

$$x^2 + y^2 - \frac{2}{3}ayz = 0. \tag{2}$$

2° L'équation du centre de la conique (1) est

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \alpha u + 2\beta v + 3w = 0.$$

Les coordonnées de ce point sont donc

$$x = \frac{\alpha}{3} \qquad \text{et} \qquad y = \frac{2\beta}{3};$$

l'élimination de $\alpha$, $\beta$ est encore immédiate et conduit à l'ellipse dont l'équation est

$$x^2 + \frac{y^2}{4} - \frac{ay}{3} = 0. \tag{3}$$

3° L'axe focal est la droite qui joint le point $(\alpha, \beta)$ au centre. Il a donc pour équation

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ \alpha & \beta & 1 \\ \alpha & 2\beta & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\beta x - 2\alpha y + \alpha\beta = 0;$$

et en identifiant cette équation avec l'équation générale de la droite, $ux + vy + w = 0$, on a de suite

$$\beta = \theta u, \qquad 2\alpha = -\theta v, \qquad \alpha\beta = \theta w.$$

L'élimination de $\alpha$, $\beta$, $\theta$ se fait encore très aisément et conduit à l'équation tangentielle de l'enveloppe,

$$w^2(4u^2 + v^2) + 4avu^2 = 0. \tag{4}$$

Cette équation se décompose en deux : $w = 0$, qui représente l'origine des coordonnées, et

$$w(4u^2 + v^2) + 4avu^2 = 0,$$

qui représente une courbe de troisième classe doublement tangente à la droite de l'infini en deux points imaginaires conjugués, et qui, par suite, est la projection oblique d'une hypocycloïde à trois rebroussements. L'origine s'introduit dans cette enveloppe, parce que l'équation (1), pour $\alpha = \beta = 0$, se réduit à $w^2 = 0$, et que, pour cette conique singulière, l'axe est une droite quelconque passant par le point O.

Il est facile de trouver l'équation ponctuelle de l'enveloppe et de construire cette courbe. En effet, de l'équation de l'enveloppe, on tire la valeur de $w$, $w = -\frac{4avu^2}{4u^2+v^2}$; l'équation générale des tangentes à cette courbe, c'est-à-dire des axes focaux des coniques du système considéré, est donc

$$(ux + vy)(4u^2 + v^2) - 4avu^2 = 0,$$

et l'on obtiendra l'équation ponctuelle de l'enveloppe en annulant les deux dérivés de cette fonction, par rapport à $u$ et à $v$, et éliminant entre ces équations, le rapport $\frac{u}{v}$ ou le rapport $\frac{v}{u}$; mais il vaut mieux résoudre les deux équations dérivées par rapport à $x$ et $y$, car on obtient ainsi pour $x$ et $y$ deux fonctions rationnelles du paramètre $\frac{u}{v}$ ou $\frac{v}{u}$. Ces calculs, très faciles à effectuer, donnent pour résultats

$$x = \frac{8auv^3}{(4u^2+v^2)^2}, \qquad y = \frac{4au^2(4u^2-v^2)}{(4u^2+v^2)^2},$$

puis, en posant

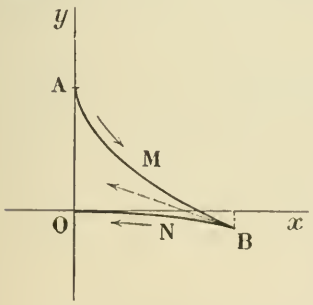
$$\frac{v}{u} = t,$$

$$x = \frac{8at^3}{(4+t^2)^2}, \qquad y = \frac{4a(4-t^2)}{(4+t^2)^2}. \qquad 3$$

La discussion simultanée de ces deux fonctions est simple. Remarquons d'abord que le changement de $t$ en $-t$ n'altère pas la valeur de $y$ et donne pour nouvelle valeur de $x$ une valeur opposée à la première. La courbe est donc symétrique par rapport à l'axe des $y$, et, si l'on tient compte de cette symétrie, il suffit de construire la portion de courbe obtenue en faisant varier $t$ de 0 à $+\infty$. Cela posé, prenons les dérivées de $x$ et de $y$,

$$x' = \frac{8at^2(12-t^2)}{(4+t^2)^3}, \qquad y' = \frac{8at(t^2-12)}{(4+t^2)^3};$$

ces deux dérivées ne s'annulent qu'une fois dans l'intervalle considéré, pour $t = \sqrt{12}$; depuis $t = 0$ jusqu'à $t = \sqrt{12}$, $x'$ est positif, $y'$, négatif; ensuite les deux signes changent. De là résultent les deux variations de $x$ et de $y$: $x$ part de 0, pour $t = 0$, et croît jusqu'à un maximum, $\frac{3a\sqrt{3}}{4}$, qu'il atteint pour $t = \sqrt{12}$, puis décroît depuis ce maximum jusqu'à la valeur 0; en même temps, $y$ part de la valeur $a$, pour $t = 0$, décroît jusqu'à un minimum, $\frac{-a}{8}$, qu'il atteint pour $t = \sqrt{12}$ et croît ensuite jusqu'à 0. Le coefficient angulaire de la tangente, $\frac{y'}{x'}$, est ici $-\frac{1}{t}$; il croît régulièrement de $-\infty$ à 0. On obtient donc ainsi l'arc AMBNO, dans le sens des flèches, et il n'y a plus qu'à compléter la courbe, à l'aide de la symétrie constatée, par rapport à $Oy$. Les points de rebroussement, A, B, B', sont nettement mis en évidence par cette discussion.




4° Soient $x$ et $y$ les coordonnées de l'un des sommets de l'axe focal, et $u$, $v$, $w$ un certain système de coordonnées homogènes de la tangente en ce point; ces cinq nombres vérifieront les équations

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u} = -\alpha\beta u + \alpha w = x,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial v} = 2\beta w = y,$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial w} = \alpha u + 2\beta v + 3w = 1,$$

$$ux + vy + w = 0$$

et

$$\beta x - 2\alpha y + \alpha\beta = 0.$$

Nous aurons donc le lieu des sommets en éliminant $u$, $v$, $w$, $\alpha$ et $\beta$ entre ces cinq équations et la relation $\alpha^2 + \beta^2 - 2a\xi = 0$; or les trois premières équations du système précédent donnent linéairement $u$, $v$, $w$; en tenant compte de $\alpha^2 + \beta^2 = 2a\xi$, et en portant les valeurs ainsi obtenues dans la quatrième équation, on est ramené à éliminer $\alpha$ et $\beta$ entre les trois équations

$$(y^2 - 4x^2 + 4ay)\xi + 4xy\alpha - 5ay^2 = 0,$$
$$\alpha\xi - 2\alpha y + \beta x = 0,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 - 2a\beta = 0.$$

Ces équations ne contiennent que $\alpha^2$, $\beta^2$, $\alpha\beta$, $\alpha$, $\beta$: en multipliant la première par $\alpha$, puis par $\beta$, la seconde par $\alpha$, puis y substituant à $\alpha^2$ la valeur $2a\beta - \beta^2$, on obtient six équations linéaires entre $\alpha^2$, $\beta^2$, $\alpha\beta$, $\alpha$, $\beta$, et l'élimination de ces quantités entre elles donne le résultat sous forme d'un déterminant du sixième ordre,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2a & 0 \\ 4xy & 0 & \mathrm{H} & -5ay^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{H} & 4xy & 0 & -5ay^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4xy & \mathrm{H} & -5ay^2 \\ 0 & 1 & 0 & -x & -2(a+y) & 4ay \\ 0 & 0 & 1 & -2y & x & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dans lequel H désigne, pour abréger, la fonction $\mathrm{H} = y^2 - 4x^2 + 4ay$. En multipliant la cinquième ligne par $y$, et divisant la quatrième colonne par $y$, la dernière par $y^2$, on supprime le facteur $y^2$, et il reste une équation du sixième degré, que l'on amène, par des transformations faciles, à la forme

$$\begin{vmatrix} -4xy & 2\mathrm{H} - 5ay & 11axy \\ \mathrm{H} & 8xy & -10ay^2 \\ 5y & 0 & 8\mathrm{H} + 11x^2 - 20y(a+y) \end{vmatrix} = 0.$$

Il est facile d'obtenir l'équation du lieu des sommets par un procédé plus ordinaire : il suffit de remarquer que la première des trois équations entre lesquelles on doit éliminer $\alpha$ et $\beta$ est linéaire, d'en déduire la valeur de $\alpha$ et de porter l'expression ainsi obtenue dans les deux autres; il n'y aura plus alors qu'à éliminer $\beta$ entre deux équations du second degré.

Mais on peut encore procéder autrement. L'équation (1) montre en effet que toutes les coniques du système sont des ellipses; alors en appelant $r$ la longueur du demi-grand axe, on a $2r = \mathrm{OF} + \mathrm{OF}'$; d'autre part les coordonnées cartésiennes du second foyer sont $-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{\beta}{3}$; par conséquent $\mathrm{OF}' = \frac{\mathrm{OF}}{3}$, et $r = \frac{2\mathrm{OF}}{3} = \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{3} = \frac{2\sqrt{2a\beta}}{3}$. D'ailleurs les paramètres principaux de l'axe focal, $\lambda$ et $\mu$, vérifient la relation $\beta\lambda - 2\alpha\mu = 0$; on a donc

$$\frac{\lambda}{2\alpha} = \frac{\mu}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{4\alpha^2 + \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{8a\beta - 3\beta^2}};$$

par suite les coordonnées du sommet sont données par les expressions

$$x = \frac{\alpha}{3} + \frac{4\alpha}{3}\sqrt{\frac{2a}{8a - 3\beta}},$$

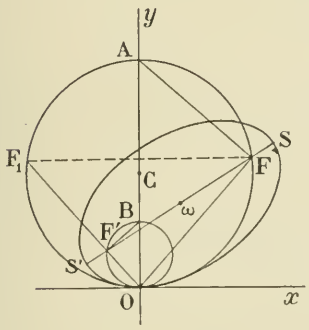
$$y = \frac{2\beta}{3} + \frac{2\beta}{3}\sqrt{\frac{2a}{8a - 3\beta}},$$

et si l'on pose $\sqrt{\frac{8a - 3\beta}{2a}} = \rho$, on obtient de suite $\beta = \frac{2a(4\rho^2 - 1)}{3\rho^2}$,

puis
$$\alpha = \frac{2a}{3\rho^2}\sqrt{(4\rho^2-1)(1-\rho^2)},$$
enfin
$$x = \frac{2a}{9\rho^2}(1+4\rho)\sqrt{(4\rho^2-1)(1-\rho^2)},$$
$$y = \frac{4a}{9\rho^2}(1+\rho)(4\rho^2-1).$$

Telles sont les fonctions qu'il faudrait étudier et discuter pour avoir la forme du lieu.

**Solution géométrique.** (Voir la figure ci-contre.) — On sait que le centre du cercle osculateur à une ellipse en un point est le conjugué harmonique sur la normale en ce point du pied de cette normale par rapport aux deux points où elle est coupée par les perpendiculaires élevées aux foyers sur les rayons vecteurs du point considéré. L'une de ces perpendiculaires passe au point A, diamétralement opposé à O, l'autre au point B, et, si l'on désigne par C le centre du cercle donné, on a $\frac{2}{OC} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OB}$; puis, comme $OC = a$, $OA = 2a$, on déduit de là $OB = \frac{2a}{3} = \frac{OA}{3}$. Le lieu du point F′ est donc le cercle décrit sur OB comme diamètre.




Il résulte de là et de l'égalité des deux angles FOA, F′OB, que $OF' = \frac{OF}{3}$; par suite, les coordonnées cartésiennes du point F′ sont $-\frac{\alpha}{3}, \frac{\beta}{3}$; celles du milieu de FF′ sont donc $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{2\beta}{3}$. Par suite le lieu du centre, ω, est une ellipse dont les ordonnées sont doubles de celles du cercle décrit sur OB comme diamètre.

Pour avoir le nombre des droites telles que FF′ et qui passent par un point M du plan, il faut chercher la nature de la correspondance qui existe entre les rayons des deux faisceaux MF et MF′. Or à toute droite MF correspondent deux points F sur le cercle donné, et, par suite, deux points F′ sur l'autre cercle; de même à toute droite MF′ correspondent deux droites MF; la correspondance entre MF et MF′ est donc (2, 2), et les deux faisceaux superposés, MF et MF′, ont quatre rayons doubles. Mais l'un de ces rayons est visiblement MO. La véritable enveloppe des axes focaux est donc de troisième classe. D'ailleurs si on se donne la direction de l'axe focal, il est facile de déterminer le triangle $FF_1O$, dans lequel les directions des droites $FF_1$ et FF′ sont connues, et où l'on sait en outre que $OF' = \frac{OF_1}{3}$, ou tout au moins de déterminer un triangle semblable à celui-là. Il n'y a donc qu'une conique ayant un axe focal de direction donnée. Par suite, par un point de la droite de l'infini, on ne peut mener qu'une tangente ordinaire à l'enveloppe. Cette courbe admet donc la droite de l'infini comme tangente double.

Solution analytique à peu près complète de M. Vasnier.
Solution géométrique différente par M. Escot, à Labastide-sur-Lhers.

---

**352.** — *D'un point* A *d'une ellipse on mène les trois normales (indépendamment de la normale au point* A*); les tangentes à l'ellipse aux points* M, N, P *forment un triangle* BCD.

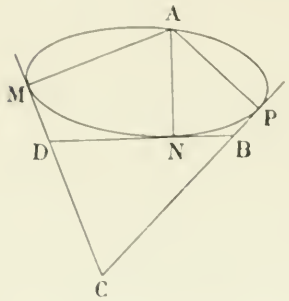
*Trouver, lorsque le point* A *décrit l'ellipse :*

1° *Le lieu des sommets de ce triangle* BCD ;

2° *Le lieu du point de concours des hauteurs* ;

3° *Le lieu des centres des cercles tangents aux trois côtés, et du cercle circonscrit* ;

4° *L'enveloppe du cercle circonscrit.*




Prenons pour axes de coordonnées les axes de l'ellipse ; l'équation de cette courbe est alors

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

et désignons par $x_0$, $y_0$ les coordonnées du point A.

L'équation aux coefficients angulaires des normales issues du point A à l'ellipse est

$$(y_0 - mx_0)^2(a^2 + b^2m^2) - c^4m^2 = 0.$$

Si le point A est sur l'ellipse, cette équation admet la racine $\frac{a^2y_0}{b^2x_0}$, et, en divisant le premier membre de l'équation précédente par $m - \frac{a^2y_0}{b^2x_0}$, on obtient

$$m^3 + \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} \cdot \frac{y_0}{x_0} m^2 + \frac{a^2 + c^2}{a^2} m - \frac{y_0}{x_0} = 0,$$

qui est l'équation aux coefficients angulaires des normales AM, AN, AP.

En changeant $m$ en $-\frac{1}{m}$, on aura l'équation aux coefficients angulaires des côtés du triangle BCD,

$$m^3 + \frac{a^2 + c^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} m^2 - \frac{a^2 - 2b^2}{b^2} m + \frac{x_0}{y_0} = 0. \qquad (1)$$

Soient $x$, $y$ les coordonnées du sommet B ; la droite AM aura pour équation

$$\frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + 1 = 0 \quad (^*) ;$$

par conséquent le coefficient angulaire de MC est $\frac{x}{y}$, ceux de BN et BP sont les coefficients angulaires des tangentes menées de B à l'ellipse.

Il en résulte que les coefficients angulaires des côtés du triangle BCD sont racines de l'équation

$$\left[m^2 - \frac{2xy}{x^2 - a^2} m + \frac{y^2 - b^2}{x^2 - a^2}\right]\left(m - \frac{x}{y}\right) = 0. \qquad (2)$$

Les équations (1) et (2) ayant mêmes racines, on devra avoir

$$\frac{x_0}{y_0} + \frac{x(y^2 - b^2)}{y(x^2 - a^2)} = 0, \qquad (3)$$

$$\frac{2b^2 - a^2}{b^2} = \frac{2x^2 + y^2 - b^2}{x^2 - a^2}, \qquad (4)$$

$$\frac{a^2 + c^2}{a^2} \cdot \frac{x_0}{y_0} + \frac{x(x^2 + 2y^2 - a^2)}{y(x^2 - a^2)} = 0. \qquad (5)$$

1° La relation (4) étant indépendante de $x_0$, $y_0$, est l'équation du lieu du point B, c'est-à-dire des sommets du triangle BCD.

Cette équation s'écrit

$$a^2x^2 + b^2y^2 - c^4 = 0 ; \qquad (\Sigma)$$

elle représente une ellipse ayant mêmes axes que l'ellipse donnée.

2° En écrivant que le point A est sur la droite AM, on a

$$xy + x_0y + y_0x = 0, \qquad (H)$$

équation qui représente une hyperbole équilatère H passant par les points B, C, D.

En portant dans (3) la valeur de $xy$ tirée de l'équation (H), on a une deuxième conique passant par

(*) Il suffit, en effet, de remarquer que cette droite est la polaire du point $\left(-\frac{a^2}{x}, -\frac{b^2}{y}\right)$ d'après les formules connues de Joachimstal.

les points B, C, D,

$$x_0y_0(x^2+y^2)+(x_0^2+y_0^2)xy+b^2y_0x+a^2x_0y=0$$

ou, en tenant compte encore de (H),

$$x^2+y^2-\frac{c^2x_0}{a^2}x+\frac{c^2y_0}{b^2}y=0, \qquad \text{(C)}$$

équation du cercle circonscrit au triangle BCD.

Si l'on forme la combinaison

$$2\Sigma-(a^2+b^2)C=0$$

on obtient

$$x^2-y^2+(a^2+b^2)\left(\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}\right)-2c^2=0, \qquad \text{(H')}$$

autre hyperbole équilatère passant par les points B, C, D.

Le quatrième point de rencontre des deux hyperboles équilatères (H) et (H') sera le point de concours des hauteurs du triangle BCD.

On voit aisément que ce point a pour coordonnées

$$x=-2x_0, \qquad y=-2y_0.$$

On en conclut le lieu des points de concours des hauteurs du triangle BCD.

3° Le centre du cercle (C), circonscrit au triangle BCD a pour coordonnées

$$x=\frac{c^2x_0}{2a^2}, \qquad y=-\frac{c^2y_0}{2b^2};$$

on en conclut que le lieu de ce point est

$$4a^2x^2+4b^2y^2-c^4=0.$$

Pour avoir le lieu des centres des cercles inscrits au triangle BCD, cherchons d'abord l'équation générale des coniques passant par les points M, N, P.

Pour cela l'ellipse et l'hyperbole d'Apollonius relative au point A ont pour équations

$$E=b^2(x+x_0)(x-x_0)+a^2(y+y_0)(y-y_0)=0,$$
$$H_1=a^2y(x-x_0)-b^2x(y-y_0)=0,$$

et, en éliminant

$$x-x_0 \qquad \text{et} \qquad y-y_0,$$
$$S=b^4x(x+x_0)+a^4y(y+y_0)=0$$

conique passant par les trois points M, N, P.

Il en résulte que l'équation générale des coniques qui passent par ces points est

$$\lambda E+\mu H_1+\nu S=0.$$

Un cercle tangent aux côtés du triangle BCD aura pour polaire réciproque par rapport à l'ellipse une conique passant par les points M, N, P.

Si $\alpha,\beta$ désignent les coordonnées du centre de l'un de ces cercles, et R son rayon, la polaire réciproque de ce cercle par rapport à l'ellipse a pour équation

$$(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)^2-R^2(b^4x^2+a^4y^2)=0;$$

on devra donc avoir

$$(b^2\alpha x+a^2\beta y-a^2b^2)^2-R^2(b^4x^2+a^4y^2)=\lambda E+\mu H_1+\nu S;$$

en égalant les termes indépendants de $x$ et de $y$, on voit que $\lambda=-a^2b^2$; en égalant ensuite les coefficients de $x^2$ et de $y^2$, on a

$$\alpha^2-R^2=-a^2+\nu,$$
$$\beta^2-R^2=-b^2+\nu,$$

ou, en retranchant,

$$\alpha^2-\beta^2=-c^2.$$

Il en résulte que le lieu des centres des cercles tangents aux côtés du triangle BCD est l'hyperbole équilatère

$$x^2-y^2+c^2=0.$$

4° L'équation du cercle (C) est

$$x^2 + y^2 - \frac{c^2 x_0}{a^2} x + \frac{c^2 y_0}{b^2} y = 0.$$

Posons $$x_0 = a \cos \varphi, \qquad y_0 = b \sin \varphi;$$

l'équation devient $$x^2 + y^2 - \frac{c^2 x}{a} \cos \varphi + \frac{c^2 y}{b} \sin \varphi = 0;$$

par suite, l'enveloppe de ce cercle a pour équation

$$(x^2 + y^2)^2 - c^4 \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) = 0,$$

quartique bicirculaire aisée à construire.

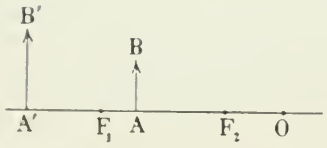
VASNIER, collège Rollin.

## PHYSIQUE

**87.** — *Démontrer que si on observe l'image d'un objet donnée par un système optique quelconque symétrique autour d'un axe, le grossissement reste le même quand, le système demeurant fixe, on échange les positions de l'œil et de l'objet.*

(*Concours général, 1891.*)

Soient $F_1$ et $F_2$ les deux foyers du système, $f$ la première distance focale, AB l'objet, $y$ son diamètre, $q_1$ la distance $F_1A$, A'B' l'image, $y'$ son diamètre, $q_2$ la distance $F_2A'$, O la position de l'œil, $a$ la distance $OF_2$.




Il suffit de démontrer que le diamètre apparent de l'image est le même dans les deux cas. Ce diamètre apparent est

$$D = \frac{y'}{a + q_2}.$$

Or l'équation aux distances conjuguées donne

$$q_1 q_2 = -f^2,$$

et l'équation du grossissement

$$\frac{y'}{y} = -\frac{f}{q_1}.$$

Remplaçons $q_2$ et $y'$ par leurs valeurs ; il vient

$$D = \frac{fy}{f^2 - aq_1},$$

expression qui ne change pas quand on permute $a$ et $q_1$.

*Remarque.* — Supposons que les milieux en contact avec les faces extrêmes du système optique aient des indices différents $n_1$ et $n_2$, et soient $f_1$ et $f_2$ les deux distances focales. On doit, dans ce cas, employer les équations générales

$$q_1 q_2 = f_1 f_2 \qquad \text{et} \qquad \frac{y'}{y} = -\frac{f_1}{q_1}.$$

Elles donnent pour le diamètre apparent

$$D = -\frac{f_1 y}{f_1 f_2 + a q_1}$$

dans la première position, et

$$D' = \frac{f_2 y}{f_1 f_2 + a q_1}$$

dans la seconde.

On en déduit
$$\frac{D}{D'} = -\frac{f_1}{f_2} = \frac{n_1}{n_2};$$
les grossissements sont entre eux comme les indices.

---

**406.** — *Le globe terrestre étant supposé entièrement fluide, sphérique, immobile et formé de couches concentriques homogènes, évaluer la pression au centre :*

1° *En unités* C. G. S. ;

2° *En atmosphères normales.*

*Rayon du globe terrestre supposé sphérique :* $R = 6371100$ mètres. *Masse spécifique à une distance $x$ du centre, d'après la formule de Roche,*
$$\mu = 10{,}6\left(1 - \frac{4}{5}\frac{x^2}{R^2}\right).$$
*On supposera l'accélération due à la pesanteur à la surface partout égale à l'accélération normale* 980,6.

Si $p$ désigne la pression et $g'$ l'accélération due à la pesanteur à la distance $x$, la formule fondamentale d'hydrostatique donne
$$dp = -\mu g' dx.$$
Pour avoir $g'$ en fonction de $x$, remarquons que $g'$ résulte de l'attraction d'une sphère de rayon $x$ et dont la masse se calcule aisément ; on trouve ainsi, en désignant par $g$ l'accélération à la surface du globe,
$$g' = \frac{25}{13}\frac{x}{R}\left(1 - \frac{12}{25}\frac{x^2}{R^2}\right)g.$$
En remplaçant $\mu$ et $g'$ par leurs valeurs et intégrant, on a
$$p = \frac{10{,}6}{130} R\left(61 - 125\frac{x^2}{R^2} + 80\frac{x^4}{R^4} - 16\frac{x^6}{R^6}\right)g.$$
Pour $x = 0$, cette formule donne
$$p_0 = 3{,}1074 \times 10^{12} \text{ unités C. G. S.}$$
La pression d'une atmosphère vaut $76 \times 13{,}596 \times g$ unités C. G. S. ; on en déduit
$$p_0 = 3{,}0668 \times 10^6 \text{ atmosphères.}$$

---

## QUELQUES QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Note de M. G. **Maupin.**

*Trouver le lieu des sommets des surfaces représentées par l'équation*
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2ayz - 2bzx - 2cxy - 1 = 0$$
*où*
$$a + b + c = 0.$$
*(Année 1894.)*

Ces surfaces ont un centre unique à l'origine si la quantité
$$\Delta = 1 - a^2 - b^2 - c^2 - 2abc$$
est différente de zéro. Si $\Delta = 0$, ce sont des cylindres qui ne peuvent se réduire à deux plans concourants (l'origine ne fait pas partie de la surface), ou parallèles (les termes du second degré de l'équation ne peuvent faire un carré parfait).

Soit $\Delta \gtrless 0$. On exprime qu'un point M de la surface est sommet en écrivant que OM est perpendiculaire au plan tangent en M. On trouve comme lieu le cône
$$x(y^2 + z^2 - x^2) + y(z^2 + x^2 - y^2) + z(x^2 + y^2 - z^2) = 0$$
et la sphère
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0.$$
On explique cette dernière solution en remarquant qu'elle correspond au cas de $a = b = c = 0$.

*On donne un sommet d'une quadrique et cinq directions asymptotiques. Lieu des autre sommets.*

(*Année 1892.*)

Les parallèles aux directions données menées par le sommet de la surface déterminent complètement un cône du second ordre, que nous supposons être un cône véritable. Soit $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 = 0$ son équation.

Celle de la surface peut alors s'écrire $Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Dx = 0$,
où D seul est variable. Mais cette dernière équation représente une famille de quadriques homothétiques par rapport à l'origine : on en conclut de suite que le lieu cherché se compose de lignes droites.

*Si les termes du deuxième degré des équations de deux quadriques ne diffèrent qu'en ce que* A, A′ *et* A″ *ont été remplacés par* $A + K$, $A' + K$, $A'' + K$, *les plans cycliques sont parallèles.*

(*Année 1892.*)

Soit
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + P = 0 \qquad (1)$$
où P est linéaire l'équation de la première quadrique. Supposons que les directions de ses plans cycliques soient représentées par l'équation
$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy - S(x^2 + y^2 + z^2) = 0. \qquad (2)$$
L'équation
$$(A + K)x^2 + (A' + K)y^2 + (A'' + K)z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy - (S + K)(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \qquad (3)$$
représente aussi un système de deux plans, car (2) et (3) sont identiques. Le théorème est donc établi.

*On coupe un ellipsoïde par un plan central. Perpendiculairement à ce plan, sur une droite passant par le centre, on porte une longueur égale au grand axe de l'ellipse. Lieu de l'extrémité.*

(*Année 1892.*)

L'équation de l'ellipsoïde étant
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$
soit
$$ux + vy + wz = 0$$
celle du plan (on peut y supposer $u^2 + v^2 + w^2 = 1$).

Si R désigne la longueur d'un axe de la section, *les deux axes* sont donnés par l'équation
$$\frac{u^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}} + \frac{v^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2}} + \frac{w^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{R^2}} = 0.$$
Ensuite les équations de la perpendiculaire au plan passant par le centre sont
$$\frac{x}{u} = \frac{y}{v} = \frac{z}{w} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}} = R,$$
d'où
$$u = \frac{x}{R}, \qquad v = \frac{y}{R}, \qquad w = \frac{z}{R}.$$
Le lieu s'obtient en éliminant R entre les équations
$$\left.\begin{aligned} &\frac{x^2}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{R^2}} + \frac{y^2}{\frac{1}{b^2} - \frac{1}{R^2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{R^2}} = 0, \\ &x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \end{aligned}\right\}$$
Rien d'ailleurs ne permet de distinguer celles des parties du lieu qui correspondent aux grands axes de celles qui répondent aux petits.

La surface ainsi obtenue est connue en physique sous le nom de *surface des ondes*.

*On considère une section centrale d'un ellipsoïde et on porte sur la perpendiculaire menée par le centre au plan de la section une longueur égale au demi-diamètre conjugué à ce plan. Lieu de l'extrémité.*

(*Année 1892.*)

Avec les mêmes notations qu'au problème précédent, on trouve
$$(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2)(x^2 + y^2 + z^2) = a^4x^2 + b^4y^2 + c^4z^2.$$

## QUESTIONS PROPOSÉES

**415** — Soit A un point fixe pris sur le côté $Ox$ d'un angle droit $xOy$ ; O′ est le centre d'un cercle Γ tangent à $Ox$ au point A et rencontrant $Oy$ en deux points B et C ; l'hyperbole équilatère H passant par O′, A, B, C rencontre le cercle Γ en un quatrième point M. Lorsque le cercle Γ varie :

1° Le lieu du centre $\omega$ de l'hyperbole H est une circonférence ;
2° Le lieu du point M est une circonférence ;
3° Le lieu du point M′ diamétralement opposé à M dans le cercle Γ est une cissoïde de Dioclès ;
4° La droite M$\omega$ rencontre l'hyperbole H en un second point qui reste fixe ;
5° La droite menée par O′ parallèlement à la tangente en M à l'hyperbole H enveloppe une parabole.

HÉNET, à Toulouse.

**416.** — On considère une ligne plane dont l'équation en coordonnées homogènes est $f(X, Y, Z) = 0$, et l'on forme les deux équations

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 f'_x + y_1 f'_y + z_1 f'_z = 0, \\ \dfrac{x_1 f''_{x^2} + y_1 f''_{xy} + z_1 f''_{xz}}{f'_x} = \dfrac{x_1 f''_{xy} + y_1 f''_{y^2} + z_1 f''_{yz}}{f'_y}. \end{cases}$$

Ces deux équations définissent une transformation des figures, en vertu de laquelle à tout point M de coordonnées $x$, $y$, $z$, il correspond un seul point $M_1$ de coordonnées $x_1$, $y_1$, $z_1$ et à tout point $M_1$ un certain nombre de points M.

1° Connaissant le point M, quelle est la définition géométrique du point $M_1$, et inversement, connaissant le point $M_1$ quelle est la définition géométrique des points M ?

2° Montrer que l'inversion est un cas particulier de la transformation définie par les formules (1).

3° Trouver le lieu des points M quand le point $M_1$ est à l'infini, et inversement. Montrer que si le point M est à l'infini, les asymptotes de la ligne $f(X, Y, Z) = 0$ font partie du lieu des points $M_1$.

4° Connaissant le degré d'une ligne décrite par le point M, trouver le degré de la ligne correspondante décrite par le point $M_1$, et inversement.

5° Etendre aux figures de l'espace la transformation définie par les formules (1). X. ANTOMARI.

**417.** — Mener entre deux droites données un segment parallèle à une direction donnée et qui soit vu d'un point donné sous un angle également donné.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE

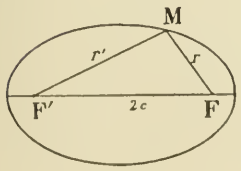
**396.** — *On considère une ellipse fixe de foyers* F *et* F′, *et un point* M *quelconque sur cette ellipse. Montrer que les deux ellipses ayant pour foyers, l'une,* F *et* M, *l'autre,* F′ *et* M, *et passant respectivement en* F′ *et* F, *ont la somme de leurs grands axes constante, ainsi que la somme des carrés de leurs petits axes.*

Nous emploierons les notations habituelles. Alors la première ellipse a pour grand axe

$$2a_1 = FF' + F'M = 2c + r',$$

et pour distance focale,

$$2c_1 = FM = r\ ;$$




pour la seconde ellipse, les nombres analogues sont

$$2a_2 = FF' + FM = 2c + r \qquad \text{et} \qquad 2c_2 = r'.$$

On déduit de là

$$2a_1 + 2a_2 = 4c + r + r' = 4c + 2a = \text{c}^{\text{te}}\ ;$$

puis

$$4b_1^2 = 4a_1^2 - 4c_1^2 = (2c + r')^2 - r^2,$$
$$4b_2^2 = 4a_2^2 - 4c_2^2 = (2c + r)^2 - r'^2,$$

et, par suite,

$$4(b_1^2 + b_2^2) = (2c + r)^2 + (2c + r')^2 - r^2 - r'^2 = 8c^2 + 4c(r + r'),$$

d'où enfin

$$4(b_1^2 + b_2^2) = 8(c^2 + ac) = \text{c}^{\text{te}}.$$

Ont résolu la question :

MM. G. DE FRANCE, H. BONNARD, G. MARTINET, FOUCHÉ, PÉGORIER, SERVANT, NAMBEU, R. VARIGAULT, A. LAURÉAUX, G. A. POUILLIART, G. LAEDERICK.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**395.** — *On considère deux cercles fixes* C, C′ *et un cercle* Γ *de rayon constant dont le centre est mobile sur* C. *On demande l'enveloppe de l'axe radical* Δ *des cercles* Γ *et* C′.

Nous prendrons pour axe des $x$ la ligne des centres et pour axe des $y$ le diamètre du cercle C perpendiculaire à cette droite; nous désignerons par $r$ et $r'$ les rayons des deux cercles C et C′, par $\rho$ celui de Γ et par $a$ l'abscisse du centre de C′. Alors les coordonnées du centre de Γ, qui est un point quelconque de C, sont $r\cos t$, $r\sin t$ et l'équation de Γ est

$$(x - r\cos t)^2 + (y - r\sin t)^2 - \rho^2 = 0;$$

celle du cercle C′ est

$$(x - a)^2 + y^2 - r'^2 = 0,$$

et l'on obtient l'axe radical par soustraction; on a ainsi

$$2(r\cos t - a)x + 2r\sin t.y + a^2 + \rho^2 - r^2 - r'^2 = 0,$$

ou

$$(r\cos t - a)x + r\sin t.y = \Lambda,$$

en posant

$$\Lambda = \frac{r^2 + r'^2 - a^2 - \rho^2}{2}.$$

Nous obtiendrons l'enveloppe de cette droite en combinant son équation avec celle qu'on obtient en prenant la dérivée par rapport à $t$. Cette seconde équation est

$$-x\sin t + y\cos t = 0;$$

elle permet de calculer $\sin t$ et $\cos t$, et, par suite, de faire immédiatement l'élimination de $t$. Le calcul se fait ainsi : on a d'abord

$$\frac{\cos t}{x} = \frac{\sin t}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

puis, en portant ces valeurs de $\cos t$ et $\sin t$ dans l'équation de l'axe radical,

$$\left(\frac{rx}{\sqrt{x^2 + y^2}} - a\right)x + \frac{ry^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \Lambda,$$

d'où l'on déduit

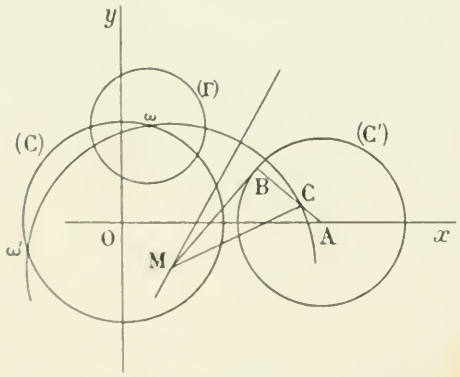
$$r\sqrt{x^2 + y^2} = ax + \Lambda,$$

et finalement

$$r^2(x^2 + y^2) = (ax + \Lambda)^2. \qquad (1)$$

Telle est l'équation de l'enveloppe. Cette courbe est une conique symétrique par rapport à $Ox$ et ayant l'origine pour foyer : l'excentricité de cette conique est $\frac{a}{r}$, car son équation peut s'écrire

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{r^2}\left(x + \frac{\Lambda}{a}\right)^2.$$




C'est donc une ellipse, une hyperbole ou une parabole, suivant que $a$ est plus petit que $r$, plus grand que $r$ ou égal à $r$, c'est-à-dire suivant que le centre de C′ est intérieur, extérieur au cercle C, ou sur ce cercle.

**Solution géométrique.** — Les lecteurs de la première partie et même les bons élèves qui lisent habituellement la seconde pourront facilement comprendre la solution suivante.

Cherchons combien il passe des axes radicaux indiqués par un point quelconque M du plan. Il suffit de trouver pour combien de cercles Γ le point M est un point d'égale puissance par rapport à (Γ) et à (C′). Or la puissance de M par rapport à (C′) est $\overline{MA}^2 - r'^2$ ou $\overline{MB}^2$, si

l'on peut mener du point M une tangente au cercle (C′) et si l'on désigne par MB la longueur de cette tangente ; la puissance du point M par rapport au cercle (Γ) est $\overline{M\omega}^2 - \rho^2$ ; en égalant ces deux puissances, on a donc

$$\overline{M\omega}^2 - \rho^2 = \overline{MA}^2 - r'^2 = \overline{MB}^2,$$

et, par suite,

$$\overline{M\omega}^2 = \overline{MA}^2 - r'^2 + \rho^2 = \overline{MB}^2 + \rho^2.$$

On aura donc, pour chaque point M, deux positions du centre ω, les deux points de rencontre du cercle (C) avec le cercle décrit de M comme centre et avec $\sqrt{\overline{MB}^2 + \rho^2}$ pour rayon : il y a donc deux axes radicaux qui passent par un point quelconque du plan, et, par conséquent, leur enveloppe est une courbe de seconde classe, une conique.

Si le point M est au centre de (C), les deux cercles dont il vient d'être parlé se coupent aux points cycliques et les deux droites Mω, Mω′ sont les rayons isotropes issus du point O ; Aω et Aω′ sont les rayons isotropes issus du point A, et, par suite, les perpendiculaires menées à ces droites par le point M ou O sont les deux droites isotropes qui passent en O. Le point O est donc un foyer.

Il est évident que OA est un axe de symétrie.

On peut d'ailleurs voir autrement que l'enveloppe est une conique. A cet effet, cherchons les points du lieu qui sont situés sur une tangente BM au cercle (C′). Ce sont les points par chacun desquels passent deux tangentes confondues ; or, les tangentes issues du point M sont les perpendiculaires abaissées sur Aω et Aω′ ; il faut donc, pour que le point M appartienne à l'enveloppe, que les deux droites Aω et Aω′ soient confondues, c'est-à-dire que ω et ω′ soient confondus, ou que le cercle ayant pour centre le point M et qui détermine les points ω et ω′ soit tangent au cercle (C).

Mais tous ces cercles, quand le point M décrit la droite BM, passent par deux points fixes C et $C_1$, par deux points on peut mener deux cercles tangents à un cercle donné (C) ; il y a donc deux points du lieu situés sur MB, ce qui prouve que l'enveloppe est du second ordre.

Si la droite $ACC_1$ est tangente au cercle (C), elle tient lieu de l'un des cercles tangents au cercle (C) et le centre correspondant est à l'infini. Comme ce point est un point du lieu, il y a deux points à l'infini quand le point A est extérieur au cercle (C), un seul, quand il est sur le cercle (C), et aucun, quand il est à l'intérieur du cercle (C). Dans le premier cas, la conique est une hyperbole ; dans le second, c'est une parabole, et, dans le troisième, c'est une ellipse.

Il a plusieurs autres remarques géométriques simples que nous ne ferons pas ; le lecteur les verra aisément.

Solutions analytiques analogues : MM. E.-N. Barisien, Xambeu, H. Bonnard (surveillant général au lycée de Bordeaux), Fouché (répétiteur au lycée de Mont-de-Marsan), P. Sabot (pensionnat de Valbenoître), Pégourier (répétiteur au collège de Cette), R. Varigault (131e de ligne), G. Vergnon (à Lagarde), G. Martinet, G. Laederick, A. Laureaux, Servant, G.-A. Pouillard, Naudin.

Solutions analytique et géométrique complètes : G. de France (à Versailles).

Bonne solution géométrique : Eug. Barré (à Douai).

---

**397.** — *On donne une ellipse* E,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

*et un point* P $(\alpha, \beta)$ *dont la polaire par rapport à* E *coupe l'ellipse en* M *et* N.

1° *Former l'équation générale des coniques* C *qui passent par* M *et* N, *et telles que* MN *soit la polaire de* O *par rapport à chacune de ces coniques.*

2° *Trouver le lieu des points où les coniques* C *sont coupées par leurs diamètres parallèles à* MN.

3° *Démontrer qu'à chaque point* P *correspondent deux coniques* C *tangentes à* E. *Indiquer la correspondance qui existe entre la position du point* P *et la nature des coniques* C *tangentes à* E.

1° Nous désignerons, pour abréger, par E le premier membre de l'équation de l'ellipse, par P le premier membre de l'équation de la polaire du point $(\alpha, \beta)$,

$$E \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1, \qquad P \equiv \frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1,$$

et par $ux + vy + w = 0$ l'équation de la droite qui joint les deux autres points de rencontre de l'ellipse E avec une des coniques C.

L'équation de cette conique, C, est alors

$$E + P(ux + vy + w) = 0.$$

D'autre part, la polaire du point $(x_0, y_0)$ ayant pour équation $x_0 f'_x + y_0 f'_y + f'_z = 0$, la polaire de l'origine est $f'_z = 0$, ou

$$-2 + wP - (ux + vy + w) = 0;$$

pour que cette droite coïncide avec la droite $P = 0$, il faut que la partie $ux + vy + w + 2$ ait ses coefficients proportionnels à ceux de P, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{a^2 u}{\alpha} = \frac{b^2 v}{\beta} = \frac{w + 2}{-1};$$

en appelant $\lambda$ la valeur commune de ces rapports, on déduit de là

$$u = \frac{\lambda\alpha}{a^2}, \qquad v = \frac{\lambda\beta}{b^2}, \qquad w = -2 - \lambda,$$

et en portant ces valeurs dans l'équation de la conique C, elle devient

$$C \equiv E + \lambda P^2 - 2P = 0.$$

2° Cela posé, la droite OP passe par le milieu de MN, puisqu'elle joint le centre de l'ellipse au pôle de MN; mais elle passe aussi au pôle de MN par rapport à la conique C. Elle définit donc la direction conjuguée de MN, et le diamètre parallèle à MN est le diamètre conjugué de la direction OP. Cette direction a pour paramètres $\alpha$ et $\beta$; son diamètre a donc pour équation

$$\alpha C'_x + \beta C'_y = 0,$$

ou

$$\alpha\left(\frac{x}{a^2} + \frac{\lambda P\alpha}{a^2} - \frac{\alpha}{a^2}\right) + \beta\left(\frac{y}{b^2} + \frac{\lambda P\beta}{b^2} - \frac{\beta}{b^2}\right) = 0;$$

cette équation s'écrit finalement

$$P - A + \lambda(A + 1)P = 0,$$

en posant

$$A = \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1.$$

Il n'y a plus qu'à éliminer $\lambda$ entre cette équation et l'équation $C = 0$, pour avoir le lieu; on obtient ainsi

$$(A + 1)P(E - 2P) + P^2(A - P) = 0,$$

équation qui se décompose en deux autres $P = 0$, et

$$(A + 1)E - P(P + A + 2) = 0. \qquad (1)$$

Telle est l'équation du lieu. Ce lieu est une conique qui passe aux points M et N.

La première équation, $P = 0$, représente la droite MN; elle s'introduit quand on fait $\lambda$ infini; car alors la conique C se réduit à deux fois la droite $P = 0$ et tous ses diamètres coïncident avec cette droite; par suite tous les points de cette droite sont des points de rencontre et font partie du lieu total.

Revenons au véritable lieu. Son équation est

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right)\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right) - \left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right)^2 - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} + 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} - 1\right) = 0,$$

ou

$$\frac{(\beta x - \alpha y)^2}{a^2 b^2} - \left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2}\right) = 0.$$

Cette équation représente une parabole ayant pour direction diamétrale $\beta x - \alpha y = 0$ ou OP, passant à l'origine des coordonnées et admettant pour tangente en ce point $\frac{\alpha x}{a^2} + \frac{\beta y}{b^2} = 0$, c'est-à-dire

une parallèle à la polaire du point P ; comme on sait, d'autre part, qu'elle passe aux points M et N, elle est bien déterminée géométriquement par toutes ces conditions, qui rentrent d'ailleurs les unes dans les autres, et qui se réduisent à quatre.

3° Il suffit de regarder l'équation $C = 0$ pour voir que la conique C coupe l'ellipse en quatre points qui sont sur les deux droites $P = 0$ et $\lambda P - 2 = 0$. Or on sait que la condition de contact d'une droite $ux + vy + w = 0$ avec l'ellipse $E = 0$ est $a^2u^2 + b^2v^2 - w^2 = 0$ ; c'est là d'ailleurs un exercice commode à résoudre pour tous nos lecteurs. Il sera donc facile d'exprimer que la seconde sécante, $\lambda P - 2 = 0$, est tangente à l'ellipse, c'est-à-dire d'exprimer que la conique C est tangente à E. Les deux sécantes communes étant parallèles, et la droite MN rencontrant l'ellipse E en deux points distincts, il ne peut pas y avoir contact autrement. On arrive de la façon signalée à la condition de contact, qui est

$$\lambda^2\left(\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2}\right) - (\lambda + 2)^2 = 0,$$

ou

$$\lambda^2(A + 1) - (\lambda + 2)^2 = 0.$$

Les valeurs de $\lambda$ sont données par les deux équations du premier degré $\frac{\lambda + 2}{\lambda} = \pm\sqrt{A + 1}$ ; elles sont toujours réelles, car $A + 1$ est toujours positif.

D'autre part, les termes du second degré de $C = 0$ sont

$$\frac{x^2}{a^2}\left(1 + \frac{\lambda\alpha^2}{a^2}\right) + \frac{y^2}{b^2}\left(1 + \frac{\lambda\beta^2}{b^2}\right) + \frac{2\lambda\alpha\beta}{a^2b^2}xy ;$$

la condition pour que ce soit une ellipse, une hyperbole ou une parabole, est donc

$$\frac{1}{a^2b^2}\left(1 + \frac{\lambda\alpha^2}{a^2}\right)\left(1 + \frac{\lambda\beta^2}{b^2}\right) - \frac{\lambda^2\alpha^2\beta^2}{a^4b^4} \gtreqless 0,$$

ou

$$1 + \lambda(A + 1) \gtreqless 0.$$

La dernière question sera donc résolue, si nous plaçons le nombre $-\frac{1}{A + 1}$ par rapport aux racines du trinome précédent,

$$A\lambda^2 - 4\lambda - 4.$$

Remplaçons $\lambda$ par $\frac{-1}{A + 1}$ dans ce trinome et multiplions le résultat obtenu par $(A + 1)^2$, nous serons conduit à étudier le signe du produit $-A^2(4A + 3)$ ou de $-(4A + 3)$.

Or l'équation $4A + 3 = 0$, ou $\frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$, représente une ellipse homothétique et concentrique à l'ellipse donnée, dont les axes sont les moitiés de ceux-ci. A l'intérieur de cette ellipse, le résultat obtenu est positif, et le nombre $-\frac{1}{A + 1}$ est d'un même côté des deux racines ; à l'extérieur de cette courbe, le nombre $-\frac{1}{A + 1}$ est compris entre les racines et l'on a

$$\lambda_1 < -\frac{1}{A + 1} \qquad \text{ou} \qquad (A + 1)\lambda_1 + 1 < 0,$$

et

$$\lambda_2 > -\frac{1}{A + 1} \qquad \text{ou} \qquad (A + 1)\lambda_2 + 1 > 0,$$

car on peut multiplier par $A + 1$ qui est positif, sans changer le sens de l'inégalité. La première racine donne une hyperbole et la seconde une ellipse. Si donc le point P est à l'extérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$, les deux coniques C tangentes à l'ellipse E sont : l'une, une ellipse, l'autre, une hyperbole. Examinons maintenant ce qui se passe quand le point P est à l'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{1}{4} = 0$. Dans ce cas, A est négatif, la demi-somme des racines du trinome est égale à $\frac{2}{A}$ et est négative ; si on exprime qu'elle est plus petite que le nombre $-\frac{1}{A + 1}$, on obtient l'inégalité

$\frac{2}{A} < -\frac{1}{A+1}$, ou $2A+2 > -A$, ou $3A+2 > 0$ ; cette condition équivaut à $\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{1}{3} > 0$ ; elle n'est jamais remplie, puisque les points de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{4}=0$ sont tous à l'intérieur de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{3}=0$. Les deux racines $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont donc supérieures à $-\frac{1}{A+1}$ et les deux coniques étudiées sont des ellipses. Sur l'ellipse séparative $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{1}{4}=0$, l'une des coniques est une ellipse, l'autre une parabole.

Dans le cas où les deux points M et N sont confondus, le point $P(\alpha, \beta)$ est sur l'ellipse donnée et toutes les coniques C se réduisent à des couples de droites ayant pour centre le point P et par rapport auxquelles la droite OP et la tangente à l'ellipse au point P, $P=0$, sont conjuguées harmoniques.

Le premier lieu se compose de la droite $P=0$ et de la droite OP comptée deux fois. Quant aux coniques C tangentes à l'ellipse et trouvées antérieurement, ce sont : d'abord la droite $P=0$ comptée deux fois, puis la droite OP comptée deux fois aussi.

*Remarque.* — Ce problème est très facile à traiter géométriquement, à l'aide d'une transformation homographique, qui change l'ellipse et les coniques C en cercles.

Solutions analytique et géométrique : M. G. Martinet.
Solutions analytiques : MM. Pégorier, Tzitzeica, C. Naudin, A. Laureaux, R. Varigault, Fouché.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**418.** — Étant donnés deux axes rectangulaires, on considère un cercle ayant son centre à l'origine, et dont le rayon est R, et un point A sur l'axe $Oy$, à une distance du centre égale à $a$ ($a > R$). Un diamètre variable du cercle le coupe en B et C. On demande l'équation générale des coniques bitangentes au cercle en B et C, et passant par le point A.

En A, on mène la tangente à la courbe ; elle coupe l'un des axes en D, l'autre en E. Trouver le lieu de D et le lieu de E.

Trouver de même le lieu du point de rencontre de chacun des axes avec la normale en A.

On considère le point P, qui a pour coordonnées $(a, a)$. Lieu du point de rencontre de la polaire de ce point avec BC.

Dans chaque question, on distinguera la partie du lieu qui correspond au cas où la courbe est une ellipse, de celle qui correspond au cas où la courbe est une parabole. A. Morel.

**419.** — On donne un angle droit $xOy$, et l'on inscrit dans cet angle un rectangle dont la seconde diagonale est à une distance fixe du point O. On demande le lieu du point de concours de la parallèle à cette diagonale menée par le point O avec la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la même diagonale.

**420.** — Les extrémités A et B d'un côté d'un rectangle variable sont, l'une, A, fixe, l'autre, B, mobile sur une droite fixe ; en outre le côté opposé passe par un point fixe, I, de cette droite. On demande le lieu du sommet opposé à A.

## BIBLIOGRAPHIE

*Abrégé de la théorie des fonctions elliptiques, à l'usage des candidats à la licence ès sciences mathématiques, par* Charles Henry, *maître de conférences à l'Ecole pratique des hautes études.* — Paris. — Nony et Cie, éditeurs.

Le premier mérite de ce livre est de ne point mentir à son titre : il est court (124 pages 8°) et il est élémentaire. Il n'exige du lecteur que la connaissance des premiers principes de la théorie des fonctions ; encore les rappelle-t-il plus d'une fois. C'est que l'auteur aime la clarté ; il a par surcroît l'élégance, et ce qui est plus rare, la vie. En remplaçant autant que possible le calcul, qui apprend peu, par le raisonnement, qui explique et qui instruit, il a fait tenir dans un petit volume tout ce que la doctrine a d'essentiel, jusques et y compris des notions sur le difficile problème de la transformation. Son livre, plus original que ne le représente une préface trop modeste, est moderne sans injustice pour le passé. C'est ainsi que, mettant à la place centrale qui lui revient la fonction $\wp$ de Weierstrass, construite de toutes pièces à l'aide des propriétés générales des fonctions doublement périodiques, il l'étudie en détail, puis y rattache les fonctions *sn*, *cn*, *dn*, primitivement introduites par Abel et Jacobi, pour finir par les fonctions *thêta*. — L'*Abrégé* de M. Ch. Henry sera sous peu dans les mains de tous ceux qui veulent s'initier à une théorie dont les applications se multiplient chaque jour ; aucun d'eux ne se repentira de l'avoir pris pour guide. D'autres lecteurs, plus avancés, l'ont étudié avec fruit et avec plaisir. E. H.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 10 Juillet 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES COURBES UNICURSALES

Par **M. L. Raffy,**

Maître de conférences à l'École Normale Supérieure et à la Faculté des Sciences.

Les pages qu'on va lire n'ont pas pour objet d'exposer une fois de plus une théorie devenue depuis longtemps classique. En insistant sur l'idée qui la domine, et qu'on ne fait peut-être pas assez ressortir d'habitude, j'ai voulu seulement ouvrir à nos jeunes lecteurs quelques perspectives sur le domaine, aujourd'hui si bien exploré, de la géométrie algébrique.

**1.** On sait qu'une courbe algébrique plane est dite *unicursale* (ou *rationnelle*) si les coordonnées cartésiennes de tous ses points peuvent être exprimées par des fonctions rationnelles d'un paramètre. On dit que les formules

$$(1) \qquad x = \frac{A(t)}{C(t)}, \qquad y = \frac{B(t)}{C(t)},$$

où A, B, C sont trois polynomes entiers en $t$, à coefficients constants, fournissent la *représentation paramétrique* d'une courbe unicursale ; il est toujours entendu qu'aucun polynome entier en $t$ ne divise à la fois A, B et C.

Dans ces conditions, si $n$ est le plus haut exposant de $t$ dans A, B et C, les paramètres des points communs à la courbe et à une droite *quelconque* $ux + vy + w = 0$ sont les racines d'une équation

$$(2) \qquad uA(t) + vB(t) + wC(t) = 0,$$

de degré $n$. On conclut de là que *la courbe est d'ordre $n$*, étant coupée en $n$ points par une droite. Mais cette conclusion, pour être valable, exige essentiellement qu'*à deux valeurs différentes du paramètre $t$ correspondent en général deux points différents de la courbe ;* c'est-à-dire que, si l'on se donne *arbitrairement* une valeur de $t$, les équations

$$\frac{A(t')}{C(t')} - \frac{A(t)}{C(t)} = 0, \qquad \frac{B(t')}{C(t')} - \frac{B(t)}{C(t)} = 0$$

ne doivent admettre d'autre solution commune en $t'$ que $t' = t$. Quand il en est ainsi, à une valeur du paramètre correspond un seul point de la courbe, à un point *quelconque* de la courbe correspond une seule valeur du paramètre. On dit alors qu'il y a *correspondance uniforme* entre les points de la courbe et les valeurs du paramètre, ou encore que la représentation paramétrique (1) est une *représentation normale*.

Cette correspondance uniforme tient à un fait analytique simple. En éliminant $t$ entre les relations (1) pour obtenir l'équation cartésienne de la courbe, on exprime la condition nécessaire et suffisante pour que les deux équations $Cx - A = 0$, $Cy - B = 0$ aient une racine commune en $t$, ou que les deux polynomes $Cx - A$, $Cy - B$ aient un diviseur commun. Ce diviseur commun est géné-

ralement du premier degré en $t$; en l'égalant à zéro pour avoir la racine commune aux équations (1), on obtient $t$ exprimé par le quotient de deux polynomes entiers en $x$ et $y$. C'est ce qui arrive nécessairement dans le cas de la représentation normale, en vertu de la définition même. Donc *le paramètre d'une représentation normale est une fonction rationnelle des coordonnées du point de la courbe auquel il correspond.*

2. Concevons maintenant que dans les formules (1), *supposées fournir une représentation normale* d'une courbe d'ordre $n$, on remplace $t$ par une fraction rationnelle d'ordre $m$ d'un nouveau paramètre $\theta$. Il viendra

$$(3) \qquad x = \frac{A_1(\theta)}{C_1(\theta)}, \qquad y = \frac{B_1(\theta)}{C_1(\theta)},$$

et l'un au moins des trois polynomes $A_1$, $B_1$, $C_1$ sera du degré $mn$ par rapport à $\theta$. L'équation aux paramètres des points d'intersection de la courbe avec une droite $ux + vy + w = 0$ prendra la forme

$$(4) \qquad uA_1(\theta) + vB_1(\theta) + wC_1(\theta) = 0$$

et sera du degré $mn$, tandis que la courbe est seulement d'ordre $n$. Mais il n'y a point là de contradiction. Car si l'on appelle $f : \varphi$ la fonction de $\theta$ qu'on a substituée à $t$, l'équation précédente n'est autre chose que

$$\varphi^n\left[uA\left(\frac{f}{\varphi}\right) + vB\left(\frac{f}{\varphi}\right) + wC\left(\frac{f}{\varphi}\right)\right] = 0$$

et l'on voit que si $t_1, t_2, \ldots, t_n$ sont les racines de l'équation (2), celles de l'équation (4) sont les $mn$ racines du système

$$f - t_1\varphi = 0, \qquad f - t_2\varphi = 0, \qquad \ldots, \qquad f - t_n\varphi = 0.$$

Elles se distribuent en $n$ groupes et les $m$ racines de chaque groupe correspondent à un seul et même point de la courbe. Toute représentation paramétrique, telle que (3), d'après laquelle à un point quelconque de la courbe correspondent plusieurs valeurs du paramètre, est dite *représentation impropre* (*). Nous montrerons tout à l'heure que, *étant données deux fractions rationnelles de même dénominateur, on peut toujours décider si, prises pour les coordonnées cartésiennes d'un point, elles fournissent une représentation normale d'une courbe unicursale, et quand il n'en est pas ainsi, obtenir une représentation normale.*

En vertu de ce théorème, qui est dû à M. Lüroth, on est en droit d'affirmer qu'*il existe toujours une correspondance uniforme entre les points d'une courbe unicursale et les valeurs d'un paramètre* convenablement choisi. De là résultent d'importantes conséquences.

Considérons en effet *deux représentations normales* d'une même courbe unicursale, savoir

$$x = \psi(t), \qquad y = \chi(t); \qquad x = \psi_1(\theta), \qquad y = \chi_1(\theta).$$

Nous avons vu que $t$ est une fonction rationnelle $F(x, y)$; c'est donc une fonction rationnelle de $\psi_1$ et de $\chi_1$ et par suite $t$ est une fonction rationnelle de $\theta$. Or pour les mêmes raisons $\theta$ est une fonction rationnelle de $t$. L'équation qui lie $t$ à $\theta$ est donc bilinéaire,

$$(5) \qquad \alpha t\theta + \beta t + \gamma\theta + \delta = 0;$$

d'où cette conclusion : *Étant donnée une représentation normale d'une courbe unicursale au moyen d'un paramètre $t$, on obtient toutes les représentations normales de cette courbe en remplaçant $t$ par une fraction rationnelle et du premier degré, à coefficients arbitraires, d'une nouvelle variable* $\theta$, c'est-à-dire en effectuant sur le paramètre $t$ une transformation homographique quelconque.

3. A cette transformation se rattache une propriété remarquable des courbes unicursales. Soit toujours $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$ une représentation normale d'une telle courbe. Considérons les for-

(*) Dans le cas où la représentation est impropre, l'élimination de $\theta$ entre les équations (3) donne un résultant qui est la puissance *même* d'un polynome entier d'ordre $n$ en $x$ et en $y$.

mules

$$\xi = \psi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right), \qquad \eta = \chi\left(\frac{at+b}{ct+d}\right),$$

où $a$, $b$, $c$, $d$ sont des constantes. Le point $(\xi, \eta)$ qu'elles déterminent décrit évidemment la même courbe que le point $(x, y)$, dont il est distinct quand $t$ est quelconque, et $t$ est une fonction rationnelle de $\xi$ et de $\eta$, comme de $x$ et de $y$. Par suite $x$ et $y$ sont des fonctions rationnelles de $\xi$ et de $\eta$, de même que $\xi$ et $\eta$ sont des fonctions rationnelles de $x$ et de $y$; à tout point $(\xi, \eta)$ de la courbe en correspond un autre $(x, y)$ parfaitement déterminé, et réciproquement. On a ainsi réalisé ce qu'on appelle une *transformation birationnelle* (ou *biuniforme*) de la courbe en elle-même. A raison de l'indétermination des coefficients $a$, $b$, $c$, $d$, *il existe une triple infinité de transformations birationnelles d'une courbe unicursale en elle-même;* en d'autres termes, *on peut d'une triple infinité de manières grouper deux à deux les points d'une courbe unicursale, de manière que l'un d'eux*, M, *étant donné, l'autre*, $\mu$, *soit parfaitement déterminé et qu'à* $\mu$ *corresponde le seul point* M.

On démontre, mais nous ne le ferons pas, que cette propriété est caractéristique ; c'est-à-dire que *si une courbe est susceptible de transformations birationnelles en elle-même, transformations qui dépendent de plus d'un coefficient arbitraire, cette courbe est unicursale.*

**4.** Les considérations qui précèdent sont susceptibles d'une grande extension. C'est ainsi qu'on a étudié les couples de courbes algébriques entre lesquelles existe une *correspondance birationnelle* (ou *biuniforme*) : Si les coordonnées $(x, y)$ des points M d'une courbe (C) sont des fonctions rationnelles des coordonnées $(\xi, \eta)$, des points $\mu$ d'une courbe (Γ) et réciproquement, on dit qu'il existe une correspondance birationnelle entre les deux courbes, ou encore que *ces deux courbes se correspondent point par point.* L'exemple le plus simple de cette propriété est fourni par les courbes unicursales. Soient en effet $x$, $y$ les coordonnées de l'une d'elles, $\xi$, $\eta$ celles d'une autre, $t$ le paramètre qui correspond uniformément aux points $(x, y)$, et $\theta$ celui qui correspond de même aux points $(\xi, \eta)$. Établissons entre $t$ et $\theta$ une relation homographique à coefficients constants, mais quelconques, telle que l'équation (5). Les coordonnées $x$, $y$ sont des fonctions rationnelles de $t$ et par suite de $\theta$ ; mais $\theta$ est une fonction rationnelle de $\xi$ et de $\eta$ ; donc $x$, $y$ sont des fonctions rationnelles de $\xi$ et de $\eta$ ; on voit de même que $\xi$ et $\eta$ s'expriment rationnellement en $x$ et en $y$. Donc *deux courbes unicursales quelconques se correspondent point par point.* En particulier *toute courbe unicursale correspond point par point à une droite.* On s'en assure en prenant pour $\xi$ et $\eta$ des binomes linéaires par rapport à $\theta$.

Il y a souvent lieu de considérer comme formant une seule et même catégorie toutes les courbes algébriques qui se déduisent de l'une d'entre elles par des transformations birationnelles. Tel est le cas des courbes unicursales. Elles appartiennent donc toutes à la même catégorie et cette catégorie n'en comprend pas d'autres.

**5.** Voici encore une propriété caractéristique des courbes unicursales ; son énoncé n'est que la traduction en langage géométrique de la correspondance uniforme entre les points de ces courbes et les valeurs d'un paramètre : *Les points de toute courbe unicursale peuvent être déterminés un à un par les courbes d'un faisceau ; toute courbe jouissant de cette propriété est unicursale.* En effet, soit $t$ le paramètre d'une représentation normale d'une courbe unicursale ; il s'exprime en fonction rationnelle des coordonnées $x$, $y$ du point qui lui correspond ; on a donc $f(x, y) - t\varphi(x, y) = 0$. Si dans cette relation on considère $x$ et $y$ comme des coordonnées courantes, on aura l'équation d'un *faisceau* de courbes algébriques, dont chacune ne coupera la courbe considérée qu'*en un seul point variable* avec $t$ puisque, par hypothèse, à une valeur donnée de $t$ ne correspond qu'un seul point de cette courbe. (Tous les autres points d'intersection sont des points fixes ; leurs coordonnées ne dépendent pas de $t$ ; ce sont des points communs à toutes les courbes du faisceau.) La réciproque est évidente : si chaque courbe d'un faisceau $f - t\varphi = 0$ coupe une courbe fixe en *un seul point* variable avec $t$, les coordonnées de

ce point sont des fonctions rationnelles de $t$ (puisque chacune d'elles est liée à $t$ par une équation algébrique) et la courbe fixe est unicursale.

6. Démontrons maintenant le théorème de M. Lüroth. Supposons données les formules

$$(1) \qquad x = \frac{A(t)}{C(t)}, \qquad y = \frac{B(t)}{C(t)},$$

où A, B, C sont trois polynomes entiers qu'aucun polynome entier en $t$ ne divise à la fois. Il s'agit de reconnaître si cette représentation paramétrique est *normale* ou *impropre*.

A une valeur $t = t_1$ correspond un seul point $(x_1, y_1)$. Si, réciproquement, à ce point $(x_1, y_1)$ correspondent $m$ valeurs du paramètre $t$, savoir $t_1, t_2, \ldots t_m$, on aura évidemment les $m - 1$ identités

$$\frac{A(t_1)}{C(t_1)} = \frac{A(t_r)}{C(t_r)}, \qquad \frac{B(t_1)}{C(t_1)} = \frac{B(t_r)}{C(t_r)}, \qquad (r = 2, 3, \ldots, m)$$

qui expriment que les deux équations

$$(6) \qquad A(t_1)C(t) - C(t_1)A(t) = 0, \qquad B(t_1)C(t) - C(t_1)B(t) = 0$$

ont en commun $m$ racines $t_1, t_2, \ldots, t_m$. Nous allons voir que, si $t_1$ reste *indéterminé*, ces $m$ racines sont des racines simples.

1° Si $t_1$ était racine multiple des équations (6), il vérifierait les équations dérivées ; d'où

$$A(t_1)C'(t_1) - C(t_1)A'(t_1) = 0, \qquad B(t_1)C'(t_1) - C(t_1)B'(t_1) = 0.$$

Or ce sont là précisément les relations qu'on obtient en égalant à zéro les dérivées des deux fractions rationnelles $A(t_1) : C(t_1)$ et $B(t_1) : C(t_1)$. Ces deux fractions se réduiraient donc à des constantes ; les trois polynomes A, B, C seraient proportionnels, contrairement à l'hypothèse faite. (On peut encore dire que la courbe se réduirait à un point $x = \text{const.}$, $y = \text{const.}$).

2° Si une racine autre que $t_1$ était racine multiple des équations (6), $t_2$ par exemple, elle vérifierait les équations dérivées ; on aurait donc

$$A(t_1)C'(t_2) - C(t_1)A'(t_2) = 0, \qquad B(t_1)C'(t_2) - C(t_1)B'(t_2) = 0,$$

ce qu'on peut encore écrire

$$\frac{A'(t_2)}{C'(t_2)} = \frac{A(t_1)}{C(t_1)} = \frac{A(t_2)}{C(t_2)}, \qquad \frac{B'(t_2)}{C'(t_2)} = \frac{B(t_1)}{C(t_1)} = \frac{B(t_2)}{C(t_2)}.$$

Ces relations ayant lieu *pour toute valeur de* $t_1$, auraient lieu aussi pour une succession continue de valeurs de $t_2$, puisque $t_2$ est l'une des racines d'une équation algébrique dont les coefficients sont des polynomes entiers en $t_1$. Pour toutes ces valeurs de $t_2$ les fractions $A : C$ et $B : C$ seraient constantes, leurs dérivées étant nulles. Ce cas ne peut donc se présenter.

Dès lors les premiers membres des équations (6) sont divisibles par

$$(t - t_1)(t - t_2) \ldots (t - t_m)$$

et comme à chaque point de la courbe correspondent, par hypothèse, $m$ valeurs de $t$ et $m$ seulement, c'est là le plus grand commun diviseur des deux polynomes (6) considérés comme fonctions de $t$. On sait par des divisions algébriques former ce plus grand commun diviseur. Nous le représenterons par $\psi(t, t_1)$. Il est du degré $m$ par rapport à $t$, et aussi par rapport à $t_1$, puisque le changement de $t$ en $t_1$ et de $t_1$ en $t$ ne fait que changer le signe des deux polynomes dont on cherche le plus grand commun diviseur. On peut donc écrire

$$\psi(t, t_1) = t^m \varphi_0(t_1) + t^{m-1}\varphi_1(t_1) + \ldots + \varphi_m(t_1),$$

les divers polynomes $\varphi$ étant de degré au plus égal à $m$. Or l'équation $\psi = 0$ admettant pour

racines $t_1, t_2, \ldots t_m$, les quotients tels que

$$(7) \qquad \theta_{rs} = \frac{\varphi_r(t_1)}{\varphi_s(t_1)} \qquad (r, s = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

sont des fonctions symétriques de $t_1, t_2, \ldots, t_m$; c'est-à-dire que les diverses fractions $\theta_{rs}$ *prennent chacune la même valeur pour les $m$ valeurs de $t$ qui correspondent à un point de la courbe.* Réciproquement *à chaque valeur de $\theta_{rs}$ correspond un seul point de la courbe.* En effet les rapports $\theta_{rs}$ ne peuvent pas se réduire tous à des constantes, sans quoi $\psi(t, t_1) = 0$ aurait toutes ses racines indépendantes de $t_1$, alors qu'elle admet certainement la racine $t = t_1$. Donc l'une au moins de ces expressions est une fraction rationnelle du degré $m$ en $t_1$, puisqu'elle est le quotient de deux polynomes de degré au plus égal à $m$ et que d'autre part elle prend la même valeur pour $m$ valeurs différentes de $t_1$. Par suite, $\theta_{rs}$ étant donné, l'équation (7) donne $m$ valeurs de $t_1$, savoir celles qui correspondent à un même point de la courbe. En résumé, *à chaque point de la courbe correspond une seule valeur pour chacun des paramètres $\theta_{rs}$; et à chaque valeur de tout paramètre $\theta_{rs}$ qui ne se réduit pas à une constante correspond un seul point de la courbe.* Chacun d'eux, pris comme variable auxiliaire, fournira une représentation *normale* de la courbe.

Remarquons que d'après un théorème démontré précédemment (n° 2) tous les $\theta_{rs}$ sont des fractions rationnelles et du premier degré de l'un d'eux. Remarquons aussi que, quand on a calculé le plus grand commun diviseur $\psi(t, t_1)$ des polynomes (6), on peut, s'il ne se réduit pas à $(t - t_1)$, affirmer que la représentation donnée (1) est *impropre.*

Voici pour terminer un exemple simple. Étant données les formules

$$(8) \qquad x = \frac{(t^2+1)^2}{t^4+3t^2+1}, \qquad y = \frac{t(t^2+1)}{t^4+3t^2+1},$$

le calcul conduit au plus grand commun diviseur

$$\psi(t, t_1) = t^2 t_1 - t(t_1^2+1) + t_1;$$

la représentation donnée est donc impropre. Pour avoir une représentation normale, nous formerons les expressions

$$\theta_{1,0} = -\frac{t_1^2+1}{t_1}, \qquad \theta_{2,0} = 1, \qquad \theta_{2,1} = \frac{-t_1}{t_1^2+1}.$$

On voit que l'une d'elles est constante, et que les deux extrêmes sont chacune l'inverse de l'autre. On peut donc, en supprimant les indices, prendre pour variable auxiliaire $\theta = -t : (t^2+1)$. On trouve ainsi

$$(9) \qquad x = \frac{1}{\theta^2+1}, \qquad y = \frac{-\theta}{\theta^2+1}$$

et en éliminant $\theta$, $x^2+y^2-x = 0$, ce qui est l'équation d'un cercle. Si l'on éliminait $t$ entre les équations (8), on trouverait une équation du quatrième degré représentant deux fois le même cercle. Mais il convient de remarquer que les formules (8), quand on n'y donne à $t$ que des valeurs réelles, *ne représentent pas le cercle tout entier.* En effet à cause de la relation qui lie $t$ à $\theta$, il faut que $\theta$ soit compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$ pour que $t$ soit réel. Ainsi les formules (8) ne représentent que l'arc de cercle qu'on obtient par les formules (9) quand on fait varier $\theta$ entre ces deux limites. Le fait que nous venons de constater est général. Une représentation paramétrique impropre ne fournit généralement que des portions de la courbe qu'elle définit, et l'on peut même, se donnant certains arcs d'une courbe unicursale, les représenter à l'exclusion de tous les autres en substituant à la représentation normale de la courbe une représentation impropre convenablement choisie. Mais cette possibilité ne me semble pas mériter plus qu'une simple indication.

## ENVELOPPE D'UN CERCLE ORTHOGONAL A UN CERCLE FIXE ET DONT LE CENTRE DÉCRIT UNE CONIQUE A CENTRE

par M. **Ch. Hugon**, professeur au lycée de Nîmes.

Soient
$$\frac{x^2}{A_1} + \frac{y^2}{B_1} - 1 = 0. \qquad (D_1)$$
l'équation d'une conique à centre $(D_1)$ rapportée à ses axes, que nous appellerons *conique déférente*, et
$$x^2 + y^2 - 2\alpha_1 x - 2\beta_1 y + 2\delta_1 = 0 \qquad (\omega_1)$$
l'équation d'un cercle fixe de centre $\omega_1$ que nous appellerons *cercle directeur*.

Le cercle dont l'équation est
$$x^2 + y^2 - 2mx - 2ny + 2p = 0$$
sera orthogonal à ce dernier si l'on a
$$m\alpha_1 + n\beta_1 - \delta_1 - p = 0.$$

En éliminant $p$ entre ces deux dernières égalités, on est ramené à chercher l'enveloppe du cercle
$$2m(x - \alpha_1) + 2n(y - \beta_1) + 2\delta_1 - (x^2 + y^2) = 0.$$

On a du reste la relation
$$\frac{m^2}{A_1} + \frac{n^2}{B_1} - 1 = 0,$$
et, par suite, on obtiendra l'enveloppe en éliminant $m$, $n$, $s$ entre les égalités
$$2m(x - \alpha_1) + 2n(y - \beta_1) + s[2\delta_1 - (x^2 + y^2)] = 0$$
et
$$\frac{A_1(x - \alpha_1)}{m} = \frac{B_1(y - \beta_1)}{n} = \frac{\dfrac{x^2 + y^2}{2} - \delta_1}{s}.$$

On trouve ainsi
$$A_1(x - \alpha_1)^2 + B_1(y - \beta_1)^2 - \left(\frac{x^2 + y^2}{2} - \delta_1\right)^2 = 0;$$
c'est l'équation de l'enveloppe cherchée.

On voit qu'on peut l'obtenir en remplaçant dans l'équation tangentielle de la conique $(D_1)$,
$$A_1 u^2 + B_1 v^2 - w^2 = 0,$$
$$u \text{ par } x - \alpha_1, \qquad v \text{ par } y - \beta_1, \qquad w \text{ par } \frac{x^2 + y^2}{2} - \delta_1.$$

On peut écrire l'équation de l'enveloppe de la façon suivante :
$$(1) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 4x^2(A_1 + \delta_1) - 4y^2(B_1 + \delta_1) + 8A_1\alpha_1 x + 8B_1\beta_1 y + 4(\delta_1^2 - A_1\alpha_1^2 - B_1\beta_1^2) = 0,$$
et l'on voit, sous cette forme, que l'enveloppe est une quartique bi-circulaire.

Nous allons montrer que c'est une cyclique, c'est-à-dire une courbe pouvant être envisagée comme l'enveloppe de quatre familles de cercles dont les centres décrivent des coniques, les cercles de chaque famille étant d'ailleurs orthogonaux à un cercle fixe.

Soient
$$Au^2 + Bv^2 - w^2 = 0$$
l'équation tangentielle d'une conique à centre, rapportée à ses axes, et
$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + 2\delta = 0$$
l'équation d'un cercle.

L'équation de l'enveloppe des cercles orthogonaux au précédent et dont les centres décrivent la conique précédente, est
$$(x^2 + y^2)^2 - 4x^2(A + \delta) - 4y^2(B + \delta) + 8A\alpha x + 8B\beta y + 4(\delta^2 - A\alpha^2 - B\beta^2) = 0.$$

Identifions cette équation avec l'équation (1), et désignons $\delta_1 - \delta$ par $\lambda$; nous aurons

$$(2)\quad \begin{cases} A = A_1 + \lambda, \\ B = B_1 + \lambda, \end{cases} \qquad (3)\quad \begin{cases} (A_1 + \lambda)\alpha = A_1\alpha_1, \\ (B_1 + \lambda)\beta = B_1\beta_1, \end{cases} \qquad \delta_1^2 - \delta^2 + A\alpha^2 - A_1\alpha_1^2 + B\beta^2 - B_1\beta_1^2 = 0.$$

La dernière égalité peut s'écrire :

$$(4)\qquad \lambda\left(2\delta_1 - \lambda - \frac{A_1\alpha_1^2}{A_1 + \lambda} - \frac{B_1\beta_1^2}{B_1 + \lambda}\right) = 0.$$

Cette équation en $\lambda$ est du quatrième degré; par suite, si l'on remarque que les quantités A, B, $\alpha$, $\beta$, $\delta$ sont données sans ambiguïté en fonction de $\lambda$, on voit qu'il existe quatre couples de cercles directeurs et de coniques déférentes donnant naissance, au moyen d'une génération analogue, à l'enveloppe trouvée précédemment. L'un de ces couples, le couple $[(\omega_1), (D_1)]$, correspond à la racine $\lambda = 0$.

1° Les égalités (2) nous montrent que les coniques déférentes de chaque couple sont homofocales.

2° Si l'on désigne par $s$ et $s'$ respectivement les premiers membres des équations des coniques $(D_1)$ et $(\omega_1)$ où l'on a remplacé $x$ et $y$ par $\alpha$ et $\beta$, on voit que les équations (3) sont équivalentes aux équations

$$\frac{\partial(\lambda s + s')}{\partial\alpha} = 0, \qquad \frac{\partial(\lambda s + s')}{\partial\beta} = 0,$$

et que la parenthèse de l'équation (4) est le premier membre de l'équation en $\lambda$ du faisceau

$$\lambda s + s' = 0.$$

Donc : les centres des trois cercles directeurs différents de $(\omega_1)$ sont les sommets du triangle conjugué commun au cercle $(\omega_1)$ et à la conique $(D_1)$.

3° $\alpha$, $\beta$, $\delta$ désignant les paramètres d'un cercle directeur quelconque, on vérifie sans difficulté l'égalité suivante :

$$\alpha\alpha_1 + \beta\beta_1 - \delta - \delta_1 = 0, \quad (^*)$$

qui indique que les cercles directeurs sont orthogonaux deux à deux.

Ceci posé, soit $\omega_i (i = 1, 2, 3, 4)$ le centre d'un cercle directeur quelconque ; deux cercles infiniment voisins appartenant à la famille des cercles variables orthogonaux au cercle $(\omega_i)$, se coupent en deux points $m$, $m'$ qui appartiennent à l'enveloppe. De plus, la corde $mm'$ passe par $\omega_i$, puisque $\omega_i$ est le centre radical de tous les cercles variables de la famille précédente. On en déduit la relation

$$\omega_i m \times \omega_i m' = \rho_i^2,$$

$\rho_i$ étant le rayon du cercle $(\omega_i)$.

On voit donc, en prenant $\omega_i$ pour pôle d'inversion de l'enveloppe et $\rho_i^2$ comme puissance d'inversion, que cette courbe se transforme en elle-même. L'enveloppe est par suite une anallagmatique et possède quatre pôles d'anallagmatie.

*Discussion des positions relatives du cercle $(\omega_1)$ et de la conique $(D_1)$.*

Nous étudierons la nature des pôles d'anallagmatie en étudiant la nature des points d'intersection des coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$.

Nous désignerons par $F(\lambda)$ le premier membre de l'équation en $\lambda$ des deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ :

$$F(\lambda) = 2\delta_1 - \lambda - \frac{A_1\alpha_1^2}{A_1 + \lambda} - \frac{B_1\beta_1^2}{B_1 + \lambda}.$$

1° Si les deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ se coupent en quatre points réels ou imaginaires conjugués, les quatre pôles d'inversion sont réels.

2° Si les deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ se coupent en deux points réels et deux points imaginaires conjugués, un seul des pôles $\omega_2$, $\omega_3$, $\omega_4$ est réel, les deux autres sont imaginaires conjugués. Il y a deux pôles d'inversion réels : le point $\omega_1$ et un point de la corde commune.

(*) L'équation (4), où l'on remplace $\frac{A_1\alpha_1}{A_1 + \lambda}$ et $\frac{B_1\beta_1}{B_1 + \lambda}$ par $\alpha$ et $\beta$, est justement identique à cette relation.

3° Si les coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ sont tangentes, il y a deux pôles réels d'inversion confondus au point de contact, et un pôle réel sur la tangente en ce point ; il y a donc en tout deux pôles simples réels et un pôle double : le point de contact.

Dans ce cas d'ailleurs l'équation $F(\lambda) = 0$ a une racine double. Cette racine double vérifie également l'équation

$$\frac{dF}{d\lambda} = -1 + \frac{A_1\alpha_1^2}{(A_1+\lambda)^2} + \frac{B_1\beta_1^2}{(B_1+\lambda)^2} = 0,$$

qui exprime simplement que les coordonnées $(\alpha, \beta)$ du pôle d'inversion correspondant à la racine double vérifient l'équation de la conique $(D_1)$. C'est le point de contact. En outre, on vérifie facilement que l'on a

$$F(\lambda) + \lambda\frac{dF}{d\lambda} = -\alpha^2 - \beta^2 + 2\delta,$$

c'est-à-dire que le rayon du cercle directeur qui a pour centre le point de contact est nul. L'anallagmatie correspondant à ce pôle double est dite *exceptionnelle* : tous les cercles variables orthogonaux au cercle directeur passent par ce point.

Soient $\omega_i$ ce point de contact, $D_i$ la conique déférente correspondante, O le centre d'un cercle variable passant par $\omega_i$, ce centre O étant sur la conique $D_i$. La corde du cercle O perpendiculaire à la tangente OT au point O de la conique $D_i$, et menée par $\omega_i$, rencontre ce cercle O en un second point M qui appartient à l'enveloppe.

Soit $\omega_i'$ le point diamétralement opposé au point $\omega_i$ dans le cercle O; le point $\omega_i'$ décrit une conique $D_i'$ homothétique à la conique $D_i$ (pôle $\omega_i$, module 2). Donc la droite $\omega_i'M$ est tangente en $\omega_i'$ à cette conique $D_i'$; et, par suite, l'enveloppe est *la podaire d'une conique* $D_i'$.

Soit N un point de la corde $\omega_iM$, tel que l'on ait

$$\omega_iN \times \omega_iM = R^2,$$

R étant le rayon d'un certain cercle fixe de centre $\omega_i$.

Le point N décrit la polaire réciproque de la conique $D_i'$ par rapport au cercle précédent. Donc on peut dire que : l'enveloppe est l'*inverse d'une conique polaire réciproque de la conique* $D_i'$.

Il résulte de là que l'enveloppe possède un point double au point $\omega_i$. On a une anallagmatie exceptionnelle et pour cette anallagmatie la courbe ne se reproduit par aucune inversion ayant pour pôle $\omega_i$.

*Cas particulier* (*). — Le pôle $\omega_i$ se trouve sur la déférente correspondante $D_i$.

Dans ce cas l'enveloppe est la podaire d'une conique par rapport à l'un de ses points, elle possède un point de rebroussement au point $\omega_i$. C'est aussi l'inverse d'une parabole.

On a dans ce cas

$$\frac{\alpha^2}{A} + \frac{\beta^2}{B} - 1 = 0,$$

$$\frac{\alpha^2}{A_1} + \frac{\beta^2}{B_1} - 1 = 0,$$

en exprimant que le point $\omega_i$ se trouve à la fois sur les coniques $D_i$ et $D_1$.

En retranchant ces deux égalités membre à membre, on obtient

$$\frac{A_1\alpha_1^2}{(A_1+\lambda)^3} + \frac{B_1\beta_1^2}{(B_1+\lambda)^3} = 0.$$

Cette égalité nous prouve que la valeur de $\lambda$ correspondant au pôle $\omega_i$ satisfait à l'équation

$$\frac{d^2F}{d\lambda^2} = 0.$$

(*) Ce cas ne se présente pas quand il y a un contact ordinaire ; c'est donc en réalité le quatrième cas de la discussion actuelle.

Donc l'équation $F(\lambda) = 0$ a une racine triple. Dès lors les deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ ont un contact du deuxième ordre. Le cercle $(\omega_1)$ est *osculateur à la conique* $(D_1)$ *au point* $\omega_i$.

Dans ce cas on a un pôle triple au point $\omega_i$ et un pôle simple au point $\omega_1$.

4° Si $F(\lambda) = 0$ a une racine triple, le cercle $(\omega_1)$ est osculateur à la conique $(D_1)$ et l'un des trois pôles d'inversion se trouve sur la conique déférente correspondante ; l'enveloppe présente un point de rebroussement.

*Dégénérescence d'une anallagmatie en une symétrie.* — Si l'on se reporte à l'équation (1) de l'enveloppe, on voit que si l'on suppose soit $\alpha_1$ nul, soit $\beta_1$ nul, l'enveloppe devient symétrique par rapport à l'un des axes de la déférente $(D_1)$.

I. — *Supposons par exemple* $\beta_1 = 0$. — Le centre du cercle $(\omega_1)$ est sur l'axe $Ox$.

Si les deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ se coupent en quatre points réels ou imaginaires conjugués, l'un des pôles d'inversion est rejeté à l'infini. Il n'existe plus que trois anallagmaties et une symétrie par rapport à $Ox$, comme le montre d'ailleurs l'équation de l'enveloppe. Du reste $F(\lambda)$ n'est plus que du second degré.

Ainsi, quand l'un des pôles d'inversion est rejeté à l'infini, l'anallagmatie correspondante dégénère en une symétrie.

Il est aisé de le voir directement : Soient M et M′ deux points correspondants dans l'inversion ayant pour cercle directeur le cercle $(\omega)$. Soient A et B les extrémités du diamètre passant par M et M′. Les quatre points A, M, B, M′ forment une division harmonique. Si le point $\omega$ s'éloigne à l'infini sur ce diamètre, il en sera de même de A et le cercle $(\omega)$ tendra vers une certaine droite XY perpendiculaire à MM′ au point B. Le point B, conjugué de A par rapport à M et M′, sera à la limite le milieu du segment MM′.

Si les deux coniques $(\omega_1)$ et $(D_1)$ sont tangentes, elles sont alors bitangentes. Dans ce cas on a encore une symétrie par rapport à $Ox$ et trois anallagmaties, dont les pôles sont : le pôle de la droite des contacts, le milieu de cette corde des contacts et le point $\omega_1$.

Si le cercle $(\omega_1)$ touche la conique $(D_1)$ en l'un de ses sommets, l'enveloppe est alors la podaire et l'inverse d'une conique par rapport à un point d'un axe : une anallagmatie double, une simple et une symétrie. L'enveloppe présente un point double au point de contact.

Si le cercle $(\omega_1)$ est osculateur à la conique $(D_1)$ en un de ses sommets, l'enveloppe présente un point de rebroussement : une symétrie et une anallagmatie. L'enveloppe est la podaire d'une conique par rapport à l'un de ses sommets, c'est aussi l'inverse d'une parabole.

II. — *Supposons* $\alpha_1 = 0$ *et* $\beta_1 = 0$. — L'enveloppe possède deux axes de symétrie, les deux axes de la conique $(D_1)$.

On obtient alors une anallagmatie double dont le pôle est le centre de la conique $(D_1)$ et deux symétries (deux pôles rejetés à l'infini). Du reste l'équation $F(\lambda) = 0$ est du premier degré dans le cas actuel.

## *La conique $(D_1)$ est un cercle.*

Examinons maintenant le cas particulier où la conique déférente $(D_1)$ est un cercle. Dans ce cas, on a

$$A_1 = B_1, \qquad \text{d'où} \qquad A = B.$$

Toutes les coniques déférentes sont alors des cercles concentriques au cercle $(D_1)$. L'enveloppe cherchée est une *ovale de Descartes*. Son équation devient

$$(3) \qquad (x^2 + y^2)^2 - 4(A_1 + \delta_1)(x^2 + y^2) + 8A_1(\alpha_1 x + \beta_1 y) + 4(\delta_1^2 - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)) = 0.$$

Dans le cas actuel, on a d'ailleurs

$$F(\lambda) = 2\delta_1 - \lambda - \frac{A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)}{A_1 + \lambda} = 0.$$

Cette équation étant du second degré en $\lambda$, l'enveloppe ne présente plus que trois anallagmaties. Une anallagmatie a dégénéré en une symétrie ; cela se constate au moyen d'une rotation convenable des axes coordonnés, qui donne à l'équation de l'enveloppe la forme suivante :

$$(x^2 + y^2)^2 - 4(A_1 + \delta_1)(x^2 + y^2) + 8Mx + 4(\delta_1^2 - A_1(\alpha_1^2 + \beta_1^2)) = 0.$$

*Discussion des positions relatives des cercles* $(\omega_1)$ *et* $(D_1)$. — 1° Si les deux cercles $(\omega_1)$ et $(D_1)$ ne se coupent pas en des points réels, l'équation $F(\lambda) = 0$ a deux racines réelles. Donc l'enveloppe possède trois anallagmaties et une symétrie : trois pôles d'inversion réels, l'axe de symétrie est la ligne des centres.

2° Si les deux cercles se coupent en deux points réels, l'équation $F(\lambda) = 0$ a ses deux racines imaginaires conjuguées. Donc une anallagmatie et une symétrie, un seul pôle réel : le point $\omega_1$ ; l'axe de symétrie est la ligne des centres.

3° Si les deux cercles sont tangents, l'équation $F(\lambda) = 0$ a une racine double évidemment réelle. Donc l'enveloppe possède une anallagmatie double dont le pôle est le point de contact, une anallagmatie simple de pôle $\omega_1$, et une symétrie. L'enveloppe possède un point double au point de contact dont les tangentes sont réelles ou imaginaires. L'enveloppe est alors la podaire d'un cercle et l'inverse d'une conique à centre par rapport à l'un de ses foyers. C'est un limaçon de Pascal. L'axe de symétrie est encore la ligne des centres.

*Remarque.* — Si l'on suppose à la fois $\alpha_1 = 0$ et $\beta_1 = 0$, les deux cercles $(\omega_1)$ et $(D_1)$ sont concentriques. L'équation de l'enveloppe prend la forme

$$(x^2 + y^2 - 2(A_1 + \delta_1))^2 - 4Q^2 = 0,$$

en posant
$$Q = \sqrt{(A_1 + \delta_1)^2 - \delta_1^2}.$$

On voit que l'enveloppe se compose de deux cercles réels concentriques aux précédents ; elle possède une infinité d'axes rectangulaires de symétrie, c'est-à-dire une infinité de couples d'axes rectangulaires de symétrie, de plus une anallagmatie double dont le pôle est au centre commun. Il est facile de s'en rendre compte géométriquement.

## *La conique* $(D_1)$ *se réduit à deux droites concourantes.*

Soient $X'OX$, $Y'OY$ ces deux droites. Dans ce cas particulier, l'enveloppe se réduit au système des quatre points $a$, $a_1$, $b$, $b_1$ ; $a$, $a_1$ et $b$, $b_1$ étant les deux groupes de points limites correspondant à chacune des deux familles des cercles variables orthogonaux à $(\omega_1)$ et dont les centres décrivent respectivement les deux droites $X'OX$, $Y'OY$.

## *Cas où le cercle* $(\omega_1)$ *se réduit à un point.*

Pour terminer, nous considérerons le cas où le cercle $(\omega_1)$ se réduit à un point $\omega_1$.

Comme on l'a vu précédemment, si $\omega_1$ n'est pas situé sur la déférente correspondante $(D_1)$, l'enveloppe possède en ce point un point double dont les tangentes seront réelles ou imaginaires selon que $\omega_1$ sera extérieur ou intérieur à la conique $(D_1)$. L'enveloppe est la podaire d'une conique à centre, homothétique à $(D_1)$ (pôle $\omega_1$, module 2). Si $\omega_1$ est situé sur $(D_1)$ l'enveloppe possède un point de rebroussement au point $\omega_1$. C'est la podaire d'une conique par rapport à l'un de ses points et l'inverse d'une parabole.

Dans le premier cas, $\omega_1$ est un pôle double d'inversion.

Dans le second cas, $\omega_1$ est un pôle triple d'inversion, et le pôle de l'anallagmatie simple est le centre du cercle osculateur à la conique $(D_1)$ au point $\omega_1$.

On étudierait comme précédemment les cas de dégénérescence en supposant $\omega_1$ d'abord sur l'un des axes, puis au centre de la conique $(D_1)$.

*Si* $(D_1)$ *est un cercle*, l'enveloppe sera la podaire d'un cercle et l'inverse d'une conique à centre par rapport à l'un de ses foyers ; ce sera un limaçon de Pascal, dont le point double est $\omega_1$. On a dans ce cas une anallagmatie double : pôle $\omega_1$, une symétrie et une anallagmatie simple.

Si le point $\omega_1$ se trouve sur le cercle $(D_1)$, l'enveloppe possède un point de rebroussement en ce point : c'est la podaire d'un cercle par rapport à l'un de ses points, et l'inverse d'une parabole par rapport à son foyer.

Si $\omega_1$ est au centre de $(D_1)$, l'enveloppe est un cercle concentrique à $(D_1)$. *Si* $(D_1)$ *se compose de deux droites concourantes*, l'enveloppe se compose des trois points suivants : le point $\omega_1$ et ses symétriques par rapport à chacune des deux droites données.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**398.** — *D'un point* M *pris sur un paraboloïde on mène les quatre normales* MA, MB, MC, MD, *autres que celle qui a son pied en* M. *On demande, lorsque* M *décrit le paraboloïde, de trouver :*

1° *Le lieu du centre de la sphère* $\Sigma$ *qui passe aux quatre points* A, B, C, D ;

2° *Le lieu du centre de la sphère* $\Sigma'$, *circonscrite au tétraèdre formé par les plans tangents en* A, B, C, D.

3° *Montrer, dans les mêmes conditions, que le milieu du segment formé par les centres des sphères* $\Sigma$ *et* $\Sigma'$ *est fixe.*

1° Soient
$$ay^2 + bz^2 + 2cx = 0$$
l'équation du paraboloïde et $x_0$, $y_0$, $z_0$ les coordonnées du point M.

Ces nombres vérifient la relation
$$ay_0^2 + bz_0^2 + 2cx_0 = 0.$$
Les coordonnées des points A, B, C, D satisfont aux équations
$$ay^2 + bz^2 + 2cx = 0,$$
$$(1) \qquad \frac{x_0 - x}{c} = \frac{y_0 - y}{ay} = \frac{z_0 - z}{bz};$$
en combinant ces rapports avec l'équation qui précède on obtient l'équation nouvelle
$$2x(x_0 - x) + y(y_0 - y) + z(z_0 - z) = 0.$$
D'autre part les deux premières équations donnent
$$a(y^2 - y_0^2) + b(z^2 - z_0^2) + 2c(x - x_0) = 0,$$
ou
$$a(y + y_0)(y - y_0) + b(z + z_0)(z - z_0) + 2c(x - x_0) = 0 :$$
remplaçons $y - y_0$, $z - z_0$, $x - x_0$ par les quantités proportionnelles $ay$, $bz$, $c$, nous aurons
$$a^2y(y + y_0) + b^2z(z + z_0) + 2c^2 = 0.$$
Par suite par les pieds A, B, C, D des quatre normales passent les trois quadriques
$$S_1 = ay^2 + bz^2 + 2cx = 0,$$
$$S_2 = a^2y(y + y_0) + b^2z(z + z_0) + 2c^2 = 0,$$
$$S_3 = 2x(x_0 - x) + y(y_0 - y) + z(z_0 - z) = 0 ;$$
les premiers membres des équations ne renferment pas de termes en $yz$, $zx$, $xy$. On pourra donc déterminer trois nombres $\lambda$, $\mu$, $\nu$ de telle sorte que l'équation
$$\lambda S_1 + \mu S_2 + \nu S_3 = 0$$

représente une sphère ; on trouve $\nu = ab\mu$, $\lambda = -(a+b)\mu$. L'équation de la sphère $\Sigma$ est alors

$$2ab(x^2+y^2+z^2) - 2x\,ab x_0 - c(a+b) - ay_0(a+b)y - bz_0(a+b)z - 2c^2 = 0.$$

Les coordonnées du centre sont

$$x = \frac{abx_0 - c(a+b)}{2ab}, \qquad y = \frac{y_0(a+b)}{4b}, \qquad z = \frac{z_0(a+b)}{4a};$$

le lieu de ce point s'obtient en tirant $x_0$, $y_0$, $z_0$ de ces équations et en portant les valeurs trouvées dans la relation

$$ay_0^2 + bz_0^2 + 2cx_0 = 0.$$

Ce lieu a pour équation

$$8a^2b^2(by^2+az^2) + c(a+b)^2[2abx + c(a+b)] = 0;$$

c'est un paraboloïde de même nature que le paraboloïde donné, les plans directeurs de l'un étant perpendiculaires aux plans directeurs de l'autre.

2° Désignons par $-\lambda$ la valeur commune des rapports (1), on en tire

$$(2)\qquad \begin{cases} x = x_0 - c\lambda, \\ y = \dfrac{y_0}{1+a\lambda}, \\ z = \dfrac{z_0}{1+b\lambda}; \end{cases}$$

ces quantités sont les coordonnées d'un des pieds de normales issues du point M si $\lambda$ vérifie l'équation

$$\frac{ay_0^2}{(1+a\lambda)^2} + \frac{bz_0^2}{(1+b\lambda)^2} + 2c(x_0 - c\lambda) = 0.$$

Or cette équation admet la racine $\lambda = 0$ correspondante au point M ; pour l'en débarrasser, il suffit de retrancher de son premier membre la quantité nulle $ay_0^2 + bz_0^2 + 2cx_0$ ; il reste

$$\frac{a^2y_0^2(2+a\lambda)}{(1+a\lambda)^2} + \frac{b^2z_0^2(2+b\lambda)}{(1+b\lambda)^2} + 2c^2 = 0$$

ou

$$f(\lambda) \equiv 2c^2(1+a\lambda)^2(1+b\lambda)^2 + a^2y_0^2(2+a\lambda)(1+b\lambda)^2 + b^2z_0^2(2+b\lambda)(1+a\lambda)^2 = 0.$$

En portant les quatre racines de cette équation dans les relations (2), on obtient les coordonnées des points A, B, C, D.

Le plan tangent en l'un de ces points a pour équation

$$\frac{ayy_0}{1+a\lambda} + \frac{bzz_0}{1+b\lambda} + c(x + x_0 - c\lambda) = 0,$$

ou

$$\varphi(\lambda) \equiv c^2\lambda(1+a\lambda)(1+b\lambda) - c(x+x_0)(1+a\lambda)(1+b\lambda) - ayy_0(1+b\lambda) - bzz_0(1+a\lambda) = 0;$$

le point $(x, y, z)$ sera sommet du tétraèdre formé par les plans tangents en A, B, C, D si l'équation $\varphi(\lambda) = 0$ admet trois racines de l'équation $f(\lambda) = 0$, c'est-à-dire si l'on a

$$f(\lambda) \equiv \varphi(\lambda)(2ab\lambda + k),$$

pour une valeur convenable de $k$.

En écrivant que les deux membres sont égaux pour les valeurs de $\lambda$, $-\dfrac{1}{a}$, $-\dfrac{1}{b}$, 0 et en égalant les coefficients de $\lambda^3$, on trouve

$$y_0(a-b) + y(k-2b) = 0,$$
$$z_0(b-a) + z(k-2a) = 0,$$
$$kc(x+x_0) + ayy_0 + bzz_0 + 2(a^2y_0^2 + b^2z_0^2 + c^2) = 0,$$
$$2c(a+b) + 2abx - kc = 0.$$

En égalant deux à deux les valeurs de $k$ tirées de ces relations on obtient les équations de six surfaces circonscrites au tétraèdre formé par les plans tangents en A, B, C, D.

$$S_1 \equiv 2yz + yz_0 + zy_0,$$
$$S_2 \equiv [2by + y_0(b-a)][c(x+x_0) + ayy_0 + bzz_0] + 2y(a^2y_0^2 + b^2z_0^2 + c^2) = 0,$$
$$S_3 \equiv y[2c(a+b) + 2abx] - c(2by + y_0(b-a)] = 0,$$
$$S_4 \equiv [2az + z_0(a-b)][c(x+x_0) + ayy_0 + bzz_0] + 2z(a^2y_0^2 + b^2z_0^2 + c^2) = 0,$$
$$S_5 \equiv z[2c(a+b) + 2abx] - c[2az + z_0(a-b)] = 0,$$
$$S_6 \equiv [2c(a+b) + 2abx][c(x+x_0) + ayy_0 + bzz_0] + 2c(a^2y_0^2 + b^2z_0^2 + c^2) = 0.$$

Dès lors l'équation de la sphère $\Sigma'$ sera de la forme

$$mS_1 + nS_2 + pS_3 + qS_4 + rS_5 + S_6 = 0;$$

écrivons que les coefficients de $x^2$, $y^2$, $z^2$ sont égaux et que ceux de $yz$, $zx$, $xy$ sont nuls, nous avons

$$c = ny_0 = qz_0,$$
$$m + b^2nz_0 + a^2yy_0 = 0,$$
$$qc + br + b^2z_0 = 0,$$
$$cn + ap + a^2y_0 = 0,$$

d'où nous déduisons

$$m = -\frac{c}{y_0z_0}(a^2y_0^2 + b^2z_0^2), \qquad n = \frac{c}{y_0}, \qquad p = -\frac{1}{ay_0}(a^2y_0^2 + c^2),$$
$$q = \frac{c}{z_0}, \qquad r = -\frac{1}{bz_0}(b^2z_0^2 + c^2).$$

L'équation de la sphère $\Sigma'$ peut alors s'écrire

$$2ab(x^2 + y^2 + z^2) + 2[abx_0 + c(a+b)]x + a(a+b)y_0y + b(a+b)z_0z + \frac{c^2(a^2+b^2)}{ab} = 0.$$

Les coordonnées de son centre sont

$$x = -\frac{abx_0 + c(a+b)}{2ab}, \qquad y = -\frac{y_0(a+b)}{4b}, \qquad z = \frac{-z_0(a+b)}{4a}.$$

Le lieu de ce point est le paraboloïde qui a pour équation

$$8a^2b^2(by^2 + az^2) - c(a+b)^2[2abx + c(a+b)] = 0.$$

3° Le milieu du segment formé par les centres des sphères $\Sigma$ et $\Sigma'$ a pour coordonnées $-\frac{c(a+b)}{2ab}$, 0, 0; sa position est indépendante de celle du point M.

M. V. CARRUS,
au 12e régiment d'artillerie, à Alger.

## CONCOURS DE 1895

### Concours généraux de mathématiques spéciales.

*Mathématiques* (Paris et Départements).

I. — **422.** — On considère l'équation

$$(ax^2 + bx + c)\frac{d^2y}{dx^2} + 2(\lambda x + \mu)\frac{dy}{dx} + ky = 0.$$

1° Les constantes *réelles* $a$, $b$, $c$, $\lambda$, $\mu$ étant données, on demande de prouver que l'on peut choisir la constante $k$ de manière que l'équation précédente soit vérifiée par un polynome $y = f(x)$ de degré donné $n$.

2° On suppose ensuite que le trinome

$$ax^2 + bx + c$$

a ses racines $a_0$, $a_1$ *réelles* et *distinctes* et que, dans la décomposition de $\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c}$ en fractions simples

définie par l'identité

$$\frac{\lambda x + \mu}{ax^2 + bx + c} = \frac{\alpha_0}{x - a_0} + \frac{\alpha_1}{x - a_1},$$

les coefficients $\alpha_0$, $\alpha_1$ sont *positifs* et différents de zéro.

Démontrer que, dans ces conditions, l'équation

$$f(x) = 0$$

a toutes ses racines réelles et comprises entre $a_0$ et $a_1$.

On examinera si cette équation peut avoir des racines multiples.

II. — **423.** — On donne une courbe de troisième degré $C_3$ définie par les équations

$$x = 6\lambda^2\mu, \qquad y = 6\lambda\mu^2, \qquad z = \lambda^3 + \mu^3,$$

où $\lambda$ et $\mu$ désignent deux variables indépendantes que, pour abréger, nous appellerons les coordonnées du point $a$ de la courbe $C_3$.

1° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de trois points $a_1$, $a_2$, $a_3$ de la courbe $C_3$ pour que ces points soient en ligne droite.

2° Trouver la relation qui doit lier les coordonnées de six points $a_1$, $a_2$, $a_3$, $a_4$, $a_5$, $a_6$ de cette courbe pour que ces points soient sur une conique.

Déduire de là la condition nécessaire et suffisante pour que, par trois points $a_1$, $a_2$, $a_3$ de la courbe $C_3$, on puisse faire passer une conique $C_2$ touchant $C_3$ aux points $a_1$, $a_2$, $a_3$.

Les côtés du triangle $a_1a_2a_3$ coupent $C_3$ en des points $b_1$, $b_2$, $b_3$ situés sur une droite D.

Les droites qui touchent la courbe $C_3$ aux points $a_1$, $a_2$, $a_3$ la coupent en des points $c_1$, $c_2$, $c_3$ situés sur une droite $\Delta$.

La droite D étant donnée, quel est le nombre des coniques $C_2$ qui lui correspondent ?

La droite $\Delta$ étant donnée, quel est le nombre des coniques $C_2$ qui lui correspondent ?

*(22 mai, de 8 h. 1/2 à 1 h. 1/2.)*

## *Chimie* (Paris).

I. — Etudier 1° l'acide azotique,
2° l'acide sulfurique,
3° l'acide orthophosphorique,
en s'attachant surtout à établir leurs divers modes de formation synthétique à partir des éléments, leur préparation à l'état de pureté, leur composition et leur basicité.

II. — **424.** — Une dissolution de sulfite neutre de sodium est partagée en deux parties égales.

1° Dans l'une d'elles, additionnée d'empois d'amidon, on ajoute un volume V d'une dissolution titrée d'iode jusqu'à ce que la liqueur se colore en bleu. Un sel de baryum soluble y détermine alors la formation d'un précipité dont le poids est de $1^{gr},165$.

2° L'autre moitié est soumise à une ébullition prolongée avec un excès de soufre en fleur. A la liqueur filtrée et chaude encore, on ajoute du nitrate d'argent jusqu'à cessation de précipité. Ce précipité pèse $1^{gr},24$. Dans la liqueur filtrée, un sel de baryum soluble donne un précipité dont le poids est de $1^{gr},165$.

Déduire de ces données :

1° Le poids de sulfite neutre contenu dans la liqueur primitive ;

2° Le poids du sel de sodium contenu dans la liqueur qui a été soumise à l'ébullition avec la fleur de soufre ;

3° La formule que l'on est conduit à attribuer à ce sel lorsqu'on connaît la formule du sulfite ;

4° Le volume de la solution titrée d'iode que sa dissolution serait capable d'absorber.

$O = 16 \qquad S = 32 \qquad Na = 23 \qquad Ba = 137 \qquad Ag = 108.$

*(20 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)*

## *Physique* (Paris).

I. — Mesure d'une quantité de chaleur.

II. — **425.** — Un prisme est placé sur la plate-forme d'un goniomètre de Babinet, l'arête parallèle à l'axe de rotation. Dans le collimateur, on a remplacé la fente par une ouverture circulaire munie de deux fils rectangulaires A et B, le fil A étant parallèle à l'arête du prisme. L'ouverture est éclairée par une source monochromatique.

1° Montrer d'une manière générale que, le tirage du collimateur et l'angle d'incidence étant quelconques, chacun des fils ne sera vu nettement qu'avec un tirage différent de la lunette.

2° Etant donné un tirage de collimateur et l'angle d'incidence du faisceau qui a pour sommet la croisée des fils, montrer comment devra varier le tirage de la lunette pour voir nettement A, puis B. Discuter comment variera le tirage pour le fil A, de l'incidence rasante à l'émergence rasante, en supposant successivement l'ouverture en avant et en arrière du plan focal principal du collimateur.

3° Déduire de cette discussion un ou plusieurs procédés pour placer la croisée des fils exactement dans le plan focal du collimateur.

4° Ce dernier réglage étant supposé obtenu, étudier les formes successives de l'image de l'ouverture circulaire lorsque l'incidence prend toutes les valeurs possibles.

On traitera comme un angle infiniment petit le diamètre apparent de l'ouverture vue du premier point nodal du collimateur.

*(21 mai, de 8 h. 1/2 à 2 h. 1/2.)*

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE

### *Physique et Chimie.*

*Physique.* — I. — Lunette de Galilée.

II. — Détermination du poids d'un litre d'air à 0° et à la pression de 76$^{cm}$. (On supposera connue la détermination du poids spécifique des gaz.)

*Chimie.* — Indiquer : 1° les différences qui existent entre le chlore et l'azote, et entre leurs composés ;

2° les rapprochements qu'on peut établir entre ces corps.

*(28 mai, de 7 h. à 10 h.)*

### *Mathématiques.*

**426.** — On donne : d'une part deux droites D et D′ ne se coupant pas ; d'autre part deux autres droites $\Delta$ et $\Delta'$ ne se coupant pas. On considère une droite variable OA passant par l'origine O, et située dans le plan de coordonnées $xOy$.

1° Former l'équation de la surface du deuxième degré S qui contient D, D′, et OA.

2° La surface S, et la surface analogue $\Sigma$ qui contient $\Delta$, $\Delta'$ et OA, se coupent, en dehors de OA, suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe lorsque OA décrit le plan $xOy$.

3° Déterminer les droites situées sur cette surface.

4° Étudier complètement cette surface dans le cas particulier où les quatre droites D, D′, $\Delta$ et $\Delta'$ sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point O ; et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point O.

N. B. — On conservera les notations indiquées.

*(29 mai, de 7 h. à 11 h.)*

### *Calcul trigonométrique.*

On donne dans un triangle : la base $a = 22579^{m},83$, et les deux angles $B = 71°22'34'',5$ ; $C = 39°51'20'',6$. Calculer A, $b$, $c$, la surface S et la hauteur $h$ correspondant à la base $a$.

*(29 mai, de 1 h. 1/2 à 6 h.)*

### *Géométrie descriptive.*

**427.** — Un tore à axe vertical a son centre : 1° à 140$^{mm}$ du bord droit de la feuille ; 2° à 180$^{mm}$ du bord inférieur en projection horizontale, et à 310$^{mm}$ du même bord en projection verticale. Le cercle méridien à 28$^{mm}$ de rayon, et son centre est à 68$^{mm}$ de distance de l'axe du tore.

Une sphère de 24$^{mm}$ de rayon touche l'axe du tore à 40$^{mm}$ au-dessus du centre de celui-ci. En projection horizontale le centre de cette sphère est sur la bissectrice de l'angle de deux droites issues du centre du tore, l'une de front dirigée vers la gauche, l'autre de bout dirigée vers le haut de la feuille.

A cette sphère est circonscrit un cône dont le sommet est sur l'axe du tore, à 93$^{mm}$ au-dessus du centre de celui-ci.

On demande de représenter par ses projections la partie du tore supposé plein qui est intérieure au cône. — La courbe d'intersection des deux surfaces sera en traits noirs pleins pour les parties vues, en points noirs ronds pour les parties cachées.

On indiquera en traits rouges la construction : 1° d'un point quelconque de la courbe et de la tangente en ce point ; 2° d'un point de la courbe choisi sur chacun des contours apparents circulaires du tore ; 3° de la sphère, ainsi que des parties du tore et du cône en dehors de l'intersection.

*(30 mai, de 7 h. à 11 h.)*

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

*Mathématiques.*

**428.** — Un cercle (C) et une parabole (P) sont représentés, en coordonnées rectangulaires, par les deux équations

$$(C) \quad x^2 + y^2 - 4a^2 = 0, \qquad (P) \quad y^2 - 2ax - 4a^2 = 0\,;$$

d'un point A pris sur l'axe $Oy$, on mène les tangentes au cercle, dont les points de contact sont M et M', et les tangentes à la parabole, dont les points de contact sont N et N'.

1° Démontrer que chacune des droites MN, MN', M'N, M'N' passe par un point fixe lorsque le point A décrit l'axe $Oy$.

2° Par les quatre points M, M', N, N' on peut faire passer une conique admettant l'axe des $y$ pour axe de symétrie ; former l'équation de cette conique (E).

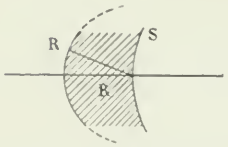
3° Trouver le nombre et la nature des coniques (E) qui passent par un point donné du plan, d'après la position de ce point dans le plan.

5° Construire la courbe décrite par les points de contact des coniques (E) avec les tangentes parallèles à la droite qui a pour équation $y = x$. Distinguer les portions du lieu qui conviennent à des ellipses de celles qui conviennent à des hyperboles.

*(17 juin, 6 heures.)*

*Physique.*

**429.** — Une lentille de verre est limitée d'un côté par une surface sphérique convexe de rayon R ; la seconde surface, de rayon S, passe par le centre de la première ; l'épaisseur de la lentille est donc égale à R.




I. — On déterminera la position de l'image d'un objet quelconque et son grossissement.

II. — La lentille étant employée comme loupe, on examinera s'il est possible de trouver une position de l'œil telle que l'image paraisse achromatique.

III. — On déterminera les positions et grandeurs de toutes les images d'un même objet dues aux réfractions et réflexions simples ou multiples dans cette lentille.

**430.** — Un calorimètre à glace contient de l'alcool dont on provoque l'évaporation par le passage d'un courant d'air pris à 0°. On demande quelle quantité d'air il faut faire passer à travers l'alcool pour en évaporer 1 gramme ; et quel poids de glace est formé par cette évaporation.

| | |
|---|---|
| Chaleur de fusion de la glace | 80c |
| Chaleur de vaporisation de l'alcool à 0° | 236c |
| Tension de vapeur de l'alcool à 0° | 12mm,7 de mercure. |
| Densité de vapeur de l'alcool | 1,59 |

Qu'arriverait-il si le courant d'air était chaud ?

*(18 juin, 6 heures.)*

# DEUXIÈME PARTIE

## ÉCOLE NAVALE (Concours de 1895.)

### Géométrie analytique.

**421.** — *$Ox$ et $Oy$ étant deux axes rectangulaires, A et B deux points pris respectivement sur ces axes, M et N les milieux respectifs de OA et BA, on considère :*

1° *L'hyperbole équilatère de centre M tangente en O à l'axe des $y$ ;*

2° *L'hyperbole équilatère de centre N tangente en B à l'axe des $y$.*

*Construire les asymptotes de ces hyperboles : elles se coupent deux à deux en quatre points qui sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle AMN.*

*Les points d'intersection de ces hyperboles, autres que le point* A, *sont à l'intersection de la circonférence circonscrite au triangle* OAB *et de la parallèle à l'axe des* $x$ *menée par* N.

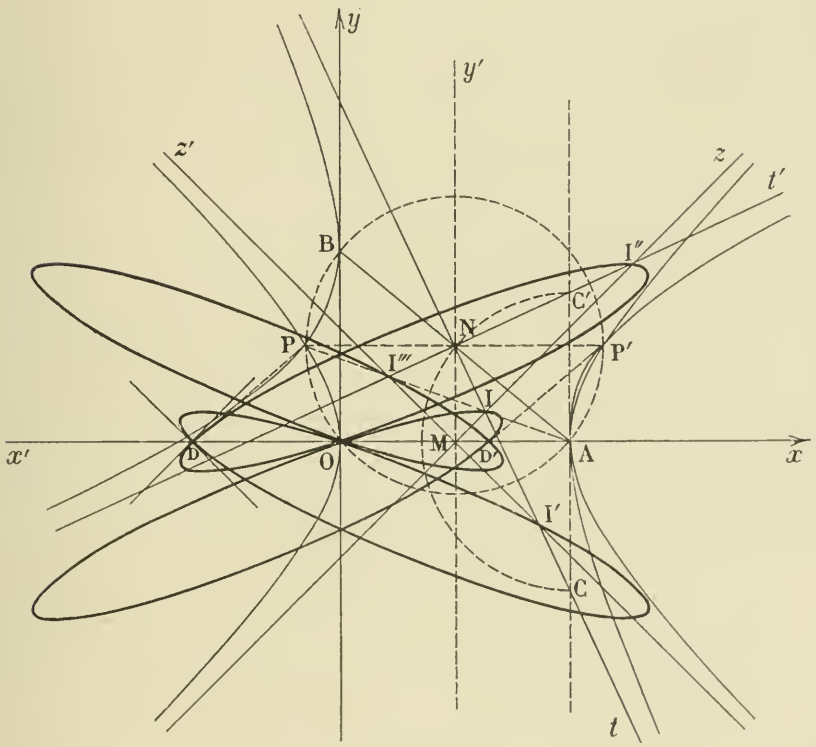
*Lieu des points de rencontre de ces hyperboles ; lieu des points de rencontre des asymptotes, lorsque* A *et* B *se déplaçant respectivement sur l'axe des* $x$ *et sur l'axe des* $y$, *la longueur* AB *reste constante.*

*Pour les notations, on posera* $OA = 2a$, $OB = 2b$, $AB = 2l$.

I. *Construction des asymptotes des hyperboles données.* — Nous appelons H l'hyperbole de centre M et H′ celle qui a N pour centre. Toutes deux passent au point A, symétrique par rapport à M et N des points O et B, qui appartiennent d'après l'énoncé à l'une ou à l'autre. De plus toutes deux ont pour tangente en A la parallèle AC à $Oy$, puisque les tangentes en deux points diamétralement opposés d'une conique sont parallèles.

Le diamètre OA de l'hyperbole H étant perpendiculaire aux tangentes $Oy$ et AC, est l'axe transverse de cette hyperbole ; l'axe non transverse est la parallèle MN à $Oy$. Il en résulte que les asymptotes sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle M du triangle AMN. Leurs équations sont

$$y - x + a = 0 \quad \text{et} \quad y + x - a = 0.$$




Le diamètre $MNy'$ de l'hyperbole H′ étant parallèle à la tangente en B est conjugué du diamètre AB. Il en résulte que les asymptotes de l'hyperbole H′ sont les bissectrices intérieure et extérieure de l'angle N du triangle ANM.

On peut encore construire ces asymptotes en remarquant qu'elles forment avec la tangente CAC′ à l'hyperbole H′ un triangle rectangle dont le demi-diamètre NA est la médiane ; il suffit donc de rabattre la longueur AN en AC et en AC′ pour avoir un point de chaque asymptote.

De ce qui précède, il résulte que les points de rencontre des asymptotes des deux hyperboles sont les centres des cercles inscrit et exinscrits au triangle AMN. Ces centres sont indiqués sur la figure en I, I′, I″ et I‴.

Les asymptotes de l'hyperbole H′ sont représentées par les équations

$$\frac{bx + ay - 2ab}{\pm\sqrt{a^2 + b^2}} = x - a,$$

ou, en séparant ces équations et remarquant que le radical est égal à $l$,

$$bx + ay - 2ab - l(x - a) = 0 \qquad \text{et} \qquad bx + ay - 2ab + l(x - a) = 0.$$

II. *Points de rencontre des hyperboles considérées.* — On a vu que les deux hyperboles sont tangentes

en A ; elles ne peuvent donc pas avoir plus de deux points communs outre le point A. Pour les trouver, cherchons les équations de ces deux courbes. Celle de l'hyperbole H est évidemment

$$(x-a)^2 - y^2 - a^2 = 0$$

ou bien

$$x^2 - y^2 - 2ax = 0. \tag{1}$$

Le faisceau des asymptotes de l'hyperbole H′ est représenté par

$$l^2(x-a)^2 - (bx + ay - 2ab)^2 = 0\,;$$

par suite cette hyperbole a pour équation

$$l^2(x-a)^2 - (bx + ay - 2ab)^2 = k,$$

pourvu que la constante $k$ soit déterminée de telle façon que la courbe passe au point A ; il suffit pour cela que l'on ait $l^2a^2 = k$. L'équation de H′ est donc

$$l^2x^2 - 2al^2x - (bx + ay - 2ab)^2 = 0.$$

En remplaçant $l^2$ par $a^2 + b^2$ et simplifiant, on obtient

$$x^2 - 2\frac{b}{a}xy - y^2 - 2\left(a - \frac{b^2}{a}\right)x + 4by - 4b^2 = 0. \tag{2}$$

Cette équation peut encore s'écrire

$$x^2 - y^2 - 2ax - 2\frac{b}{a}(xy - bx - 2ay + 2ab) = 0,$$

c'est-à-dire

$$x^2 - y^2 - 2ax - 2\frac{b}{a}(x - 2a)(y - b) = 0.$$

Sous cette forme, on voit que l'hyperbole H′ passe par les points d'intersection de l'hyperbole H et des droites qui ont pour équations

$$x - 2a = 0 \qquad \text{et} \qquad y - b = 0.$$

La première est la tangente commune CC′ ; la seconde est la parallèle PP′ menée par N à l'axe des $x$. Je dis que cette parallèle rencontre H et par suite H′ sur la circonférence qui passe par l'origine et qui a N pour centre. En effet, l'équation de cette circonférence est

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0.$$

Or, on a identiquement

$$x^2 - y^2 - 2ax \equiv x^2 + y^2 - 2ax - 2by - 2y(y - b).$$

On voit que l'hyperbole H passe par les points d'intersection du cercle avec l'axe des $x$ et avec la droite PP′ ; nous désignons ces derniers par P et P′. D'après ce qui précède ce sont les points communs, autres que A, aux deux hyperboles H et H′.

Ce fait peut encore être établi géométriquement en s'appuyant sur le théorème connu d'après lequel *une hyperbole et ses asymptotes interceptent sur une sécante quelconque des longueurs respectivement égales.* Traçons AP ; cette droite, évidemment bissectrice de l'angle BAO, passe par les points I et I‴ précédemment définis ; or le triangle rectangle INI‴ est isocèle : car l'angle NII‴, extérieur au triangle AIN, vaut 45°. Il en résulte que les triangles NAI, NPI‴, qui ont déjà leurs angles en A et P égaux, sont équiangles, et comme ils ont un côté égal, ils sont égaux ; par suite AI = I‴P. Les deux hyperboles qui passent en A et dont les asymptotes passent en I et I‴ ont donc aussi en commun le point P. Enfin l'hyperbole H passe en P′ symétrique de P par rapport à l'axe non transverse, et l'hyperbole H′ y passe aussi puisque ce point est diamétralement opposé à P.

III. *Lieu des points de rencontre de ces hyperboles lorsque les points* A *et* B *se déplacent respectivement sur l'axe des* $x$ *et sur l'axe des* $y$, *la longueur* AB *restant constante.*

Il nous suffit, d'après ce qui vient d'être établi, de chercher le lieu des points de rencontre de la

droite PP′ et de la circonférence de centre N et de rayon NO. Nous aurons ce lieu en éliminant $a$ et $b$ entre les trois équations

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by = 0,$$

$$y = b \qquad \text{et} \qquad a^2 + b^2 = l^2.$$

La valeur de $a$, tirée de la première en tenant compte de la deuxième, est

$$a = \frac{x^2 - y^2}{2x};$$

en remplaçant $a$ et $b$ par leurs valeurs dans la troisième, on trouve

$$(x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2 = 4l^2x^2,$$

ou bien

$$(x^2 + y^2)^2 - 4l^2x^2 = 0.$$

Cette équation se décompose en

$$x^2 + y^2 - 2lx = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 + 2lx = 0.$$

Le lieu cherché se compose donc de deux cercles de rayons égaux à $l$ et dont les centres sont les points D et D′ situés sur O$x$ à des distances de l'origine O égales à $l$. Ce résultat est facile à trouver géométriquement : car ODPN, OD′P′N sont évidemment des losanges qui se déforment quand la droite AB se déplace, mais de telle façon que leurs côtés restent égaux à la moitié de cette droite, c'est-à-dire à $l$.

Les cercles qu'on vient de trouver répondent tout entiers à la question : car à chaque point $x$, $y$ pris sur l'un d'eux correspond pour $a$ et $b$ un système de valeurs acceptables ; ces valeurs sont

$$a = \frac{x^2 - y^2}{2x} \qquad \text{et} \qquad b = y.$$

*Lieu des points de rencontre des asymptotes.* — Désignons soit par $\varepsilon$ soit par $\varepsilon'$ les nombres $+1$ et $-1$ ; les asymptotes des hyperboles H et H′ sont alors représentées par

$$[3] \qquad \varepsilon y + x - a = 0 \qquad \text{et} \qquad bx + ay - 2ab - \varepsilon' l(x - a) = 0.$$

Nous aurons l'équation du lieu de leurs points de rencontre en tirant de ces équations les valeurs de $a$ et de $b$ et les portant dans la relation $a^2 + b^2 = l^2$. La première donne

$$a = x + \varepsilon y;$$

la seconde peut s'écrire, en tenant compte de la première,

$$b(2a - x) = ay + \varepsilon\varepsilon' ly,$$

ou

$$b(x + 2\varepsilon y) = y(x + \varepsilon y + \varepsilon\varepsilon' l).$$

Le résultat de l'élimination est l'équation

$$[4] \qquad [(x + \varepsilon y)^2 - l^2](x + 2\varepsilon y)^2 + (x + \varepsilon y + \varepsilon\varepsilon' l)^2 y^2 = 0.$$

Le lieu se compose de toutes les lignes dont on obtient les équations en donnant dans [4] à $\varepsilon$ et à $\varepsilon'$ soit la valeur $+1$ soit la valeur $-1$. Nous pouvons constater que le changement de signe de $\varepsilon$ a pour effet de remplacer dans le résultat $l$ par $-l$ ; si après avoir attribué à $\varepsilon$ la valeur $+1$ on lui donne la valeur $-1$, $l$ se trouve dans le résultat remplacé par $-l$ et en outre $y$ par $-y$. Pour achever les calculs, nous considérerons seulement l'équation

$$[5] \qquad [(x + y)^2 - l^2](x + 2y)^2 + (x + y + l)^2 y^2 = 0,$$

qu'on trouve en faisant dans [4] $\varepsilon = \varepsilon' = +1$, et dans tous les résultats obtenus nous ferons les changements qu'on vient d'indiquer.

Le premier membre de l'équation [5] est divisible par $x + y + l$. Par conséquent les quatre

droites représentées par

$$x+y+l=0, \qquad x+y-l=0,$$
$$x-y+l=0, \qquad x-y-l=0,$$

font partie du lieu des points communs aux asymptotes des hyperboles ; il est aisé de voir qu'on les obtient en attribuant à la variable $b$ la valeur zéro d'où résultent pour $a$ les valeurs $+l$ et $-l$ ; les hyperboles se confondent quand on fait ces hypothèses.

L'équation [5] débarrassée du facteur $x+y+l$ se réduit à

$$(x+y-l)(x+2y)^2+(x+y+l)y^2=0$$

ou bien

$$(x+y)[(x+2y)^2+y^2]-l(x+3y)(x+y)=0.$$

Nous trouvons donc la solution $x+y=0$, à laquelle il faut joindre $x-y=0$. Ces solutions doivent être rejetées : car on ne peut obtenir un point sur l'une de ces droites qu'en donnant à $a$ la valeur zéro ; or pour cette valeur la première équation [3] se réduit bien à $\varepsilon y+x=0$; mais la seconde, qui représente le lieu des points également éloignés de deux droites confondues, est indéterminée ; elle ne représente plus les asymptotes de l'hyperbole H′ qui sont en ce cas parallèles à celles de H.

Nous obtenons, après la suppression de cette solution étrangère, l'ellipse réelle représentée par l'équation

$$[6] \qquad (x+2y)^2+y^2-l(x+3y)=0.$$

Nous devons y joindre les trois ellipses qui ont pour équations

$$(x-2y)^2+y^2-l(x-3y)=0,$$
$$(x+2y)^2+y^2+l(x+3y)=0,$$
$$(x-2y)^2+y^2+l(x-3y)=0.$$

Elles sont symétriques de la première par rapport aux axes de coordonnées et par rapport à l'origine. Tous leurs points répondent à la question, car à chacun d'eux correspond pour $a$ et $b$ un système de valeurs acceptables donné par les équations [3].

L'ellipse [6] a pour tangente à l'origine la droite $x+3y=0$; elle rencontre l'axe des $x$ en un second point et la tangente en ce point est la droite $x+y-l=0$ trouvée plus haut. Son centre a pour coordonnées $x=-\frac{l}{2}$ et $y=\frac{l}{2}$; l'équation [6] ordonnée devient

$$x^2+4xy+5y^2-l(x+3y)=0\,;$$

la formule connue $\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2B}{A-C}$ donne ici $\operatorname{tg} 2\alpha=-1$ et montre que les axes de l'ellipse sont parallèles aux bissectrices des angles que forme avec l'axe des $x$ la seconde bissectrice des angles des axes de coordonnées. Pour avoir leurs longueurs nous rapportons la conique à ses axes et nous prenons pour axe des $x'$ la droite qui fait avec $Ox$ l'angle $-\frac{\pi}{8}$.

En transportant l'origine au centre, l'équation devient

$$x^2+4xy+5y^2-\frac{l^2}{2}=0.$$

L'application des formules connues

$$A'=\frac{1}{2}\left[A+C-\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right],$$

$$C'=\frac{1}{2}\left[A+C+\sqrt{4B^2+(A-C)^2}\right]$$

donne ici

$$A' = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2,$$
$$C' = 3 + 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} + 1)^2.$$

Rapportée aux axes indiqués, l'ellipse a pour équation

$$(\sqrt{2} - 1)^2 x'^2 + (\sqrt{2} + 1)^2 y'^2 - \frac{l^2}{2} = 0,$$

ou bien

$$\frac{x'^2}{\frac{l^2(\sqrt{2}+1)^2}{2}} + \frac{y'^2}{\frac{l^2(\sqrt{2}-1)^2}{2}} - 1 = 0.$$

On voit que la longueur du demi-grand axe est $\frac{l(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}}$ et celle du demi-petit axe est $\frac{l(\sqrt{2}-1)}{\sqrt{2}}$; ces longueurs sont faciles à construire.

Remarque. — En substituant aux asymptotes des droites passant par leurs points d'intersection et parallèles aux axes de coordonnées, on ne trouve plus les droites mais seulement les ellipses faisant partie du lieu demandé. Calculons par exemple les coordonnées des points I, I', I'' et I''' de la première figure. Des propriétés géométriques connues nous donnent sans difficulté

$$\mathrm{I}\begin{cases} x = a + y, \\ y = \dfrac{a + b - l}{2}; \end{cases} \qquad \mathrm{I}'\begin{cases} x = a - y, \\ y = \dfrac{-a + b - l}{2}; \end{cases} \qquad \mathrm{I}''\begin{cases} x = a + y, \\ y = \dfrac{a + b + l}{2}; \end{cases} \qquad \mathrm{I}'''\begin{cases} x = a - y, \\ y = \dfrac{-a + b + l}{2}. \end{cases}$$

Quand la portion de droite AB passe de l'un des angles formés par les axes de coordonnées dans un autre, ces coordonnées s'échangent l'une en l'autre; par exemple si la droite est dans l'angle $x'Oy$, les coordonnées du centre du cercle inscrit dans le triangle AMN sont celles du point I' du tableau précédent.

Tirons les valeurs de $a$ et $b$ de l'un quelconque des quatre systèmes qui précèdent; nous aurons, $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ désignant $+1$ ou $-1$,

$$a = x + \varepsilon y; \qquad b = 3y + \varepsilon x + \varepsilon' l.$$

Le lieu des points I, I', I'' et I''' est donc représenté par

$$(x + \varepsilon y)^2 + (3y + \varepsilon x + \varepsilon' l)^2 - l^2 = 0,$$

ou bien

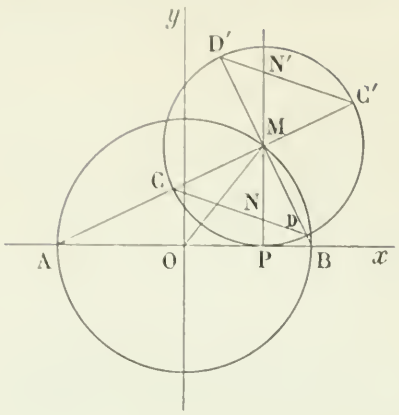
$$x^2 + 4\varepsilon xy + 5y^2 + \varepsilon' l(\varepsilon x + 3y) = 0.$$

En donnant à $\varepsilon$ et à $\varepsilon'$ soit la valeur $+1$, soit la valeur $-1$, on retrouve les quatre ellipses précédemment obtenues. E. D.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**402.** — *On donne un cercle fixe et un diamètre* AB *de ce cercle; d'un point mobile sur le cercle* M, *et pris pour centre, on décrit un cercle tangent au diamètre* AB *en* P. *On mène les droites* MA *et* MB *qui coupent le cercle mobile en* C *et* D. *Trouver le lieu du point de rencontre de la droite* CD *avec* MP.

Prenons pour axes AB et le diamètre perpendiculaire. Si l'on désigne par R le rayon du cercle donné et par $\alpha$, $\beta$ les coordonnées du point M, on a la relation




$$(1) \qquad \alpha^2 + \beta^2 - R^2 = 0,$$

et l'équation du cercle de centre M est

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 = 0.$$

D'autre part l'ensemble des droites MA et MB est représenté par l'équation

$$[y(\alpha - R) - \beta(x - R)][y(\alpha + R) - \beta(x + R)] = 0$$

ou

$$(\alpha y - \beta x)^2 - R^2(y - \beta)^2 = 0$$

ou encore

$$\beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + (\alpha^2 - R^2)y^2 + 2R^2\beta y - \beta^2 R^2 = 0;$$

et comme $\alpha^2 - R^2 = -\beta^2$, cette équation peut encore s'écrire

$$\beta x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 + 2R^2 y - \beta R^2 = 0.$$

L'équation générale des coniques circonscrites au carré CDC′D′ est alors

$$\beta x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 + 2R^2 y - \beta R^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2) = 0;$$

les valeurs de $\lambda$ relatives aux couples de sécantes parallèles CD, C′D′ et CD′, C′D s'obtiendront simplement en écrivant que l'équation précédente représente une conique du genre parabole, ce qui donne

$$\lambda^2 - R^2 = 0.$$

Prenons la valeur $\lambda = -R$; on a le couple

$$(2) \qquad \beta x^2 - 2\alpha xy - \beta y^2 + 2R^2 y - \beta R^2 - R(x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2) = 0.$$

La droite MP a pour équation

$$(3) \qquad x - \alpha = 0;$$

on aura l'équation du lieu en éliminant $\alpha$ et $\beta$ entre les équations (1), (2) et (3). On obtient sans difficulté

$$(4) \qquad (x^2 - R^2)(x^2 - y^2 + 2Ry - R^2)^2 + y^2(2x^2 + Ry - 2R^2)^2 = 0,$$

équation qui représente une courbe du sixième degré symétrique par rapport à $Oy$.

En prenant la valeur $\lambda = +R$, on aurait la courbe symétrique de celle-là par rapport à $Ox$; il sera donc suffisant de construire la courbe représentée par l'équation (4).

Posons $x = R\cos\varphi$; $y$ est déterminé par l'équation

$$-\sin^2\varphi(y^2 - 2Ry + R^2\sin^2\varphi)^2 + y^2(y - 2R\sin^2\varphi)^2 = 0,$$

ou

$$(5) \qquad y(y - 2R\sin^2\varphi) = \pm\sin\varphi(y^2 - 2Ry + R^2\sin^2\varphi);$$

si l'on prend le signe $-$, on a

$$y^2(1 + \sin\varphi) - 2Ry\sin\varphi(1 + \sin\varphi) + R^2\sin^3\varphi = 0,$$

d'où l'on tire

$$y = R\sin\varphi \pm \frac{R\sin\varphi}{\sqrt{1 + \sin\varphi}}.$$

En prenant le signe $+$ devant le second membre de la relation (5), on obtient une deuxième série de valeurs de $y$ qui se déduit de la première en changeant le signe de $\sin\varphi$ ou celui de $\varphi$; mais ce dernier changement n'altère pas la valeur de $x$, $R\cos\varphi$; par conséquent il suffira de considérer l'une des séries de valeurs de $y$ et d'y faire varier $\varphi$ dans un intervalle quelconque de $2\pi$. Nous étudierons le système

$$(6) \qquad \begin{cases} x = R\cos\varphi, \\ y = R\sin\varphi \pm \dfrac{R\sin\varphi}{\sqrt{1 + \sin\varphi}}. \end{cases}$$

$R\cos\varphi$ et $R\sin\varphi$ sont les coordonnées d'un point M du cercle de diamètre AB, $\varphi$ désignant l'angle $(Ox, OM)$. Les formules (6) font correspondre à chaque point M deux points du lieu qu'on obtient en portant de part et d'autre de M sur une parallèle à $Oy$ des longueurs égales à la valeur absolue de $\frac{R\sin\varphi}{\sqrt{1+\sin\varphi}}$; cette remarque permet de construire aisément la courbe.

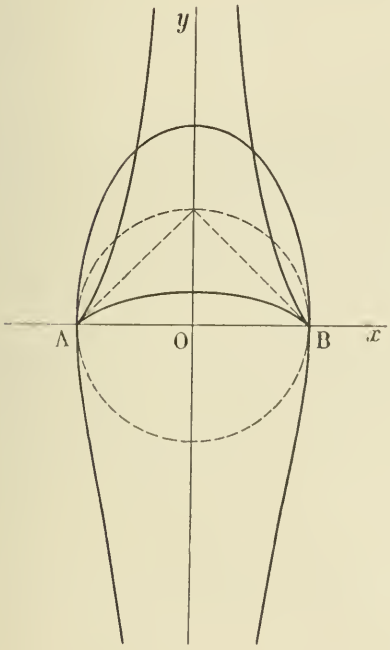
En changeant $\varphi$ en $\pi-\varphi$, $y$ ne change pas et $x$ change de signe : la courbe est donc symétrique par rapport à $Oy$, ce que l'on savait déjà ; il suffira de faire varier $\varphi$ de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$ et de prendre le symétrique de la portion de courbe obtenue par rapport à $Oy$.

On a

$$\frac{dx}{d\varphi} = -R\sin\varphi,$$

$$\frac{dy}{d\varphi} = R\cos\varphi \pm \frac{R\cos\varphi(2+\sin\varphi)}{2(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

le coefficient angulaire en chaque point de la courbe est égal au quotient de ces deux dérivées.




A chaque valeur de $\varphi$ correspondent deux points de la courbe ; pour $\varphi = 0$ les deux points sont confondus avec le point B. Pour avoir les tangentes aux deux branches de courbe correspondantes, calculons les dérivées ; $\frac{dx}{d\varphi}$ est nulle, l'une des valeurs de $\frac{dy}{d\varphi}$ (celle qui correspond au signe $+$) est différente de zéro, la tangente correspondante est parallèle à $Oy$.

L'autre valeur de $\frac{dy}{d\varphi}$ est nulle, on en conclut qu'il y a rebroussement, et pour avoir la tangente il faut chercher la limite du rapport

$$\frac{\cos\varphi - \dfrac{\cos\varphi(2+\sin\varphi)}{2(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}}}{-\sin\varphi}.$$

pour $\varphi = 0$.

Ce rapport peut s'écrire

$$\frac{\cos\varphi}{(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{2(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}} - 2 - \sin\varphi}{-2\sin\varphi(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}};$$

le premier facteur a pour limite 1 ; pour calculer la limite du deuxième je développe $(1+\sin\varphi)^{\frac{3}{2}}$ par la formule du binome, et en divisant haut et bas par $\sin\varphi$ on voit que la limite est $-1$.

F. PÉGORIER, répétiteur au collège de Cette.

Ont résolu cette question : MM. E.-N. Barisien ; A. Lacreaux, lycée de Besançon.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**431.** — La tangente au point M d'une parabole rencontre la tangente au sommet en un point N. On joint le sommet O au point M, on mène par N une parallèle à OM et par O une parallèle à MN ; ces deux droites se rencontrent en un point M'. En supposant que le point M décrive la parabole, on demande :

1° L'enveloppe de M'N ;

2° Le lieu du point M' ;

3° L'enveloppe de la droite MM' ;

4° Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle OMN.

(James Hais, répétiteur au lycée d'Orléans.)

**432.** — Une conique à centre tourne autour de son centre. Trouver l'enveloppe de la polaire d'un point fixe et le lieu du pôle d'une droite fixe par rapport à cette conique.

(James Hais.)

## BIBLIOGRAPHIE

*Essai d'une théorie élémentaire des surfaces du troisième ordre*, par F. DUMONT, professeur au lycée d'Annecy, deux brochures in-8°. Annecy, imp. Dépollier, 1894.

Le moment est bien choisi pour parler des surfaces du troisième ordre : l'énoncé du problème posé aux examens écrits de l'Ecole Polytechnique demande, en effet, aux candidats de déterminer une surface cubique donnée par l'un des modes de génération de la surface générale du troisième degré, et de trouver les vingt-sept droites de cette surface ; il se termine par l'indication d'un cas dans lequel cette surface se décompose en une quadrique et un plan.

A l'époque où ces quelques lignes paraîtront, le bruit qui s'est fait autour de cette question sera apaisé ; j'espère cependant que nos lecteurs s'en souviendront assez pour que leur curiosité soit excitée et qu'ils trouvent là un stimulant à examiner les deux brochures que je signale aujourd'hui à leur attention. Je profite donc de cette occasion pour m'acquitter d'un devoir longtemps différé, bien malgré moi cependant.

Dans la première brochure, le chapitre premier est consacré à l'étude des vingt-sept droites de la surface cubique générale ; l'auteur en fait le point de départ de sa théorie ; il montre comment on peut grouper ces droites en doubles, triples, quadruples, quintuples et sextuples et quels sont les polygones simples que l'on peut former avec elles. La méthode qu'il emploie est très simple, très facile à appliquer et même à modifier, de sorte que le lecteur peut ainsi reprendre seul, avec de légers changements, toute cette étude minutieuse. M. Dumont expose ensuite les principaux modes de génération de la surface cubique générale, en particulier (th. 8), un mode de génération par points indiqué par Schroetter et auquel se ramène identiquement la génération de la surface cubique qui fait la base de la question posée aux examens écrits de l'Ecole Polytechnique.

Le troisième chapitre est consacré aux surfaces particulières du troisième degré : surfaces réglées, surfaces à points doubles, surfaces anallagmatiques. L'auteur étudie très simplement la surface réglée la plus générale, sans s'occuper d'un cas exceptionnel, dont il parlera dans sa seconde brochure, où la surface a un élément de surface développable le long de la ligne double. Enfin le chapitre IV, qui est le dernier de la première brochure, renferme des généralités sur la théorie des pôles et polaires dans les surfaces cubiques, d'où l'auteur s'élève jusqu'à la démonstration du théorème de Sylvester sur les points doubles de la hessienne.

Dans ce premier essai, M. Dumont fait preuve d'un véritable esprit géométrique ; les démonstrations sont bien enchaînées et présentées simplement ; et, ce n'est pas un mince éloge à faire à l'auteur, que de dire qu'il peut être lu, sans beaucoup de peine, par les bons élèves de mathématiques spéciales. La lecture de cet opuscule, même si la mémoire ne gardait pas les faits nombreux qui y sont renfermés, développera en eux l'esprit géométrique, si négligé encore dans l'enseignement.

La seconde brochure présente les qualités de la première. L'auteur y revient sur la théorie des pôles et polaires qu'il pousse assez loin ; après quoi, il s'occupe du problème de la représentation des surfaces cubiques sur le plan, des divers cas que peuvent présenter les intersections d'une surface cubique par un plan, une quadrique ou une autre surface cubique ; il aborde enfin, pour terminer, le difficile problème de la classification des surfaces du troisième ordre.

E. H.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

5e Année. N° 11 Août 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### SUR LES FONCTIONS SYMÉTRIQUES

par M. **Jules Tannery**,
Directeur des études scientifiques à l'École Normale Supérieure.

L'expression « fonction symétrique des racines d'une équation », qui est passée dans le langage courant, prête à quelque confusion. Bornons-nous aux fonctions symétriques entières des racines d'une équation du troisième degré

$$(1) \qquad f(x) = 0,$$

et désignons ces racines par $a$, $b$, $c$. Devra-t-on regarder comme une fonction symétrique de ces racines un polynome $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, entier en $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, qui conserve la même valeur numérique quand on remplace les variables $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les nombres $a$, $b$, $c$ rangés dans un ordre quelconque ? Si on le fait, les raisonnements que l'on emploie d'habitude pour démontrer que la valeur de ce polynome s'exprime rationnellement au moyen des coefficients de l'équation (1) peuvent être en défaut. Si, par exemple l'équation (1) est de la forme

$$x^3 + px + q = 0,$$

la fonction $\alpha^2 - \beta\gamma$ gardera la même valeur numérique quand on remplacera $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les nombres $a$, $b$, $c$ rangés dans un ordre quelconque, puisque l'on a

$$a^2 - bc - (b^2 - ac) = (a - b)(a + b + c) = 0,$$

et, par conséquent,

$$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab.$$

Il est vrai que la valeur de $\alpha^2 - \beta\gamma$, quand on y remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par $a$, $b$, $c$, s'exprime encore rationnellement au moyen de $p$ et de $q$, car cette valeur est égale à celle de

$$\frac{\alpha^2 - \beta\gamma + \beta^2 - \alpha\gamma + \gamma^2 - \alpha\beta}{3},$$

c'est-à-dire d'une fonction symétrique au sens ordinaire du mot. Cette observation, qui se généralise sans peine, diminue certainement la portée de la critique que je viens de faire, comme de la méthode que j'indiquerai tout à l'heure, mais ne la supprime pas cependant. Des circonstances semblables à celle que je viens de signaler peuvent d'ailleurs se présenter lors même qu'on laisse l'équation (1) sous la forme générale

$$x^3 + px^2 + px + q = 0,$$

si l'on admet que les coefficients puissent figurer dans le polynome $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$ : par exemple la fonction

$$\alpha\beta - \gamma^2 - n\gamma$$

conserve la même valeur quand on y remplace $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ par les racines $a$, $b$, $c$ de l'équation du troisième degré, puisque $\alpha + \beta + \gamma$ devient alors égal à $-n$ et que l'on a

$$\alpha\beta - \gamma^2 + (\alpha + \beta + \gamma)\gamma = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta.$$

Il est à peine utile de rappeler à ce propos qu'une fonction entière de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, à coefficients cons-

tants quand on y effectue sur $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ une permutation quelconque ne peut garder la même valeur quels que soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, sans garder la même forme.

Quoi qu'il en soit, c'est sur ce fait que la fonction symétrique reste identique à elle-même, qu'elle conserve la même forme, à l'ordre des termes près, et non sur ce fait qu'elle conserve la même valeur numérique, que, à ce qu'il me semble, il convient d'insister dans la définition. Si l'on adopte cette façon de voir, on pourra dire :

Un polynome entier par rapport aux *variables* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une fonction symétrique de ces variables s'il reste identique à lui-même (s'il ne change pas de forme) quand on effectue sur ces variables une permutation quelconque ;

On appelle fonctions symétriques élémentaires des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les fonctions

$$p_1 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n,$$
$$p_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_n = x_1x_2\ldots x_n,$$

qui satisfont évidemment à la définition précédente.

Le théorème fondamental s'énoncera alors ainsi : toute fonction symétrique entière de $n$ variables s'exprime en fonction entière des fonctions symétriques élémentaires de ces $n$ variables. Ce langage est d'ailleurs couramment adopté ailleurs qu'en France.

Il n'y a, bien entendu, rien à changer aux démonstrations habituelles du théorème fondamental, soit qu'on se serve de l'expression des puissances semblables de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au moyen de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, soit qu'on suive la méthode de Waring, et la remarque que j'ai faite antérieurement sur le moyen de ramener au calcul d'une fonction symétrique le calcul de la valeur de ces polynomes qui ne changent pas de valeurs quand on y remplace les variables par les racines d'une équation, rangées dans n'importe quel ordre, suffit à montrer que la valeur d'un tel polynome s'exprime en fonction entière des coefficients de l'équation. Toutefois, on ne voit pas ainsi que cette valeur s'exprime en fonction entière *à coefficients entiers* des coefficients de l'équation, et des coefficients du polynome, lorsque l'équation n'a que des racines simples. Cette proposition, à la vérité, n'intervient pas dans les questions que l'on traite dans le cours de mathématiques spéciales, et il est bien clair qu'on peut la laisser de côté. La méthode de Cauchy en fournit toutefois une démonstration assez simple pour qu'on me permette de la signaler.

Il suffit de réfléchir sur cette méthode pour voir qu'elle ne repose pas sur ce que la forme, mais bien la valeur, de la fonction (symétrique) ne change pas quand on y fait une permutation des racines. Elle offre donc une voie pour calculer les fonctions dont j'ai parlé : toutefois lorsque l'on a affaire aux racines d'une équation numérique, cette méthode souffre, en se plaçant au point de vue que j'ai indiqué, quelques difficultés que je ne pourrais préciser qu'en en reprenant l'exposition. Le lecteur trouvera cette exposition, ainsi que quelques remarques importantes, dues à M. Blutel, relatives aux cas d'une fonction symétrique fractionnaire, dans l'excellente édition que M. Lacour a donnée du traité d'Algèbre de Briot. Je me bornerai à montrer comment, en modifiant légèrement cette exposition, on peut, pour le cas qui nous occupe, supprimer toute difficulté.

Soient donc maintenant $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les $n$ racines, supposées distinctes, de l'équation

$$f(x) = x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \cdots + L = 0,$$

à coefficients numériques. Je dirai qu'un polynome $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est une fonction symétrique relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ si la valeur numérique obtenue en y remplaçant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, rangés dans n'importe quel ordre est toujours la même. Cette valeur sera dite la valeur de la fonction symétrique (relative).

*Lemme.* — Si l'on désigne par

$$f_k(x) = x^{n-k} + A_k x^{n-k-1} + B_k x^{n-k-2} + \cdots$$

la partie entière du quotient de $f(x)$ par le polynome $(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_k)$, en sorte que

$A_k, B_k, \ldots$ sont des fonctions entières parfaitement déterminées de $x_1, x_2, \ldots, x_k$, les fonctions

$$f_k(x_{k+1}), \qquad f_k(x_{k+2}), \qquad \ldots, \qquad f_k(x_n)$$

sont relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des fonctions symétriques à valeurs nulles.

Si, en effet, on commence par remplacer, dans les coefficients de $f_k(x)$ les variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, il est clair que $f_k(x)$ deviendra

$$(x - a_{k+1})(x - a_{k+2}) \ldots (x - a_n),$$

et en remplaçant ensuite $x$ par l'un des nombres $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_n$ on aura évidemment 0 comme résultat

Ceci posé, formons d'abord la suite de polynomes

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_{n-1}(x);$$

on peut observer en passant que $f_1(x)$ s'obtient en divisant $f_1(x)$ par $x - x_1$ et en ne conservant que la partie entière, que $f_2(x)$ s'obtient en divisant $f_1(x)$ par $x - x_2$ et en ne conservant que la partie entière, etc... Il est plus important de remarquer que $f_r(x)$ est de degré $n - r$ en $x$, que le coefficient de $x^{n-r}$ est égal à l'unité, que, enfin, on a

$$f_{n-1}(x) = x + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + A.$$

Les polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$f_{n-1}(x_n), \qquad f_{n-2}(x_{n-1}), \qquad \ldots, \qquad f_1(x_2)$$

sont, relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, des fonctions symétriques à valeurs nulles. On remarquera que dans les coefficients de $f_r(x)$, considéré comme un polynome en $x$, ne figurent que les variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$, en sorte que $f_r(x_{r+1})$ sera du degré $n - r$ en $x_{r+1}$ et que le coefficient de $x_{r+1}^{n-r}$ sera l'unité.

Ordonnons maintenant le polynome $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par rapport aux puissances décroissantes de $x_n$ et divisons-le par $f_{n-1}(x_n)$, ordonné de la même façon, nous parviendrons à une identité de la forme

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f_{n-1}(x_n) \times \varphi' + \Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1});$$

$x_n$, en effet aura disparu du reste, puisque $f_{n-1}(x_n)$ est du premier degré en $x_n$; quant à $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$, c'est un polynome entier en $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dont les coefficients sont des fonctions entières, à coefficients entiers, de A, B, C, ... L et des coefficients de $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Si, maintenant, on remplace dans cette identité $x_1, x_2, \ldots, x_n$ par les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rangés dans un ordre quelconque, $f_{n-1}(x_n)$ s'annulera et l'on voit que $\Phi_1$ prendra la même valeur que $\varphi$; $\Phi_1$ est donc, relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, une fonction symétrique, comme $\varphi$, et de même valeur que $\varphi$.

Ordonnons maintenant le polynome $\Phi_1(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ par rapport aux puissances décroissantes de $x_{n-1}$ et divisons-le par $f_{n-2}(x_{n-1})$, ordonné de la même façon, le reste $\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ sera encore, relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, une fonction symétrique, de même valeur que $\Phi_1$ ou que $\varphi$, et $x_{n-1}$ n'y figurera plus qu'au premier degré; si l'on y remplace d'abord $x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}$ par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-2}$, puis $x_{n-1}$ successivement par $a_{n-1}$ et par $a_n$, on devra trouver le même résultat, et cela dans quelque ordre qu'on ait pris les racines. Il résulte de là que le coefficient de $x_{n-1}$, dans $\varphi_2$, est, relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, une fonction symétrique à valeur nulle, et que le terme indépendant de $x_{n-1}$, que je désignerai par $\Phi_2(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$, est une fonction symétrique, relative aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de même valeur que $\varphi$. De la même façon, en divisant $\Phi_2$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de $x_{n-2}$, par $f_{n-3}(x_{n-2})$, on obtiendra comme reste un polynome $\varphi_3(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2})$ qui sera relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une fonction symétrique de même valeur que $\varphi$, et qui ne contiendra $x_{n-2}$ qu'au second degré; cette fonction du second degré si l'on y remplace d'abord $x_1, x_2, \ldots, x_{n-3}$ par $a_1, a_2, \ldots, a_{n-3}$ puis successivement $x_{n-2}$ par les trois nombres différents $a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ devra avoir toujours la même valeur; on en conclut que les coefficients de $x_{n-2}$ et de $x_{n-2}^2$ sont, relative-

ment aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, des fonctions symétriques à valeurs nulles, et que le terme indépendant de $x_{n-3}$, que je désignerai par $\Phi_3(x_1, x_2, \ldots, x_{n-3})$, est, relativement aux nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$, une fonction symétrique, de même valeur que $\varphi$. On fera disparaître, l'une après l'autre, les différentes variables ; après avoir divisé par $f_1(x_2)$ on parviendra à un polynome $\varphi_n(x_1, x_2)$ qui ne contiendra plus que les variables $x_1, x_2$ la dernière ne figurant qu'au degré $n-2$, on ne conservera que le terme indépendant de $x_2$, que je désigne par $\Phi_n(x_1)$, en divisant ce polynome par $f(x_1)$ et en ne conservant dans le reste que le terme constant, que je désigne par $\Phi$, on aura exprimé la valeur de $\varphi$ en fonction entière, à coefficients entiers, de A, B, C, ..., L et des coefficients de $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, comme il résulte évidemment de la nature des opérations effectuées ; c'est ce qu'il fallait démontrer.

---

# POINTS D'INFLEXION DANS LE DÉVELOPPEMENT D'UNE SECTION PLANE D'UN CONE OU D'UN CYLINDRE

Par M. **X. Antomari**,

Professeur de Mathématiques spéciales au lycée Carnot.

---

L'étude du sens de la concavité d'un arc de courbe provenant du développement d'une section plane d'un cône ou d'un cylindre, quand on étend leur surface latérale sur un plan, présente certaines difficultés sur lesquelles M. Carvallo, examinateur d'admission à l'École Polytechnique, a récemment encore appelé l'attention des professeurs de Mathématiques spéciales. (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, nov. 1893.)

Ces difficultés et les légères critiques auxquelles donnent lieu les modes d'exposition généralement adoptées dans les cours de géométrie descriptive peuvent, je crois, être évitées en rattachant la question à une autre, très importante, du cours de Géométrie analytique : je veux parler du sens de la concavité d'une courbe en coordonnées polaires. C'est ce que je me propose de montrer dans cette note.

Je rappelle d'abord que si l'équation d'une courbe en coordonnées polaires est $\frac{1}{\rho} = f(\omega)$, le sens de la concavité en un point M de coordonnées $r$ et $\alpha$, est, en général, déterminé par le signe de la somme $f(\alpha) + f''(\alpha)$. On sait d'ailleurs que si $r$ est positif au point M la courbe est concave ou convexe vers le pôle suivant que cette somme est positive ou négative ; c'est le contraire, si $r$ est négatif. Dans tous les cas le point M est un point d'inflexion si l'on a $f(\alpha) + f''(\alpha) = 0$.

Ceci étant rappelé, soit

$$\frac{1}{\rho} = f(\alpha)\cos(\omega - \alpha) + f'(\alpha)\sin(\omega - \alpha)$$

l'équation de la tangente en M à la courbe considérée.

On sait que la distance D du pôle à cette tangente est donnée par la formule

$$\frac{1}{D^2} = [f(\alpha)]^2 + [f'(\alpha)]^2.$$

Si l'on prend les dérivées des deux membres par rapport à $\alpha$, on obtient

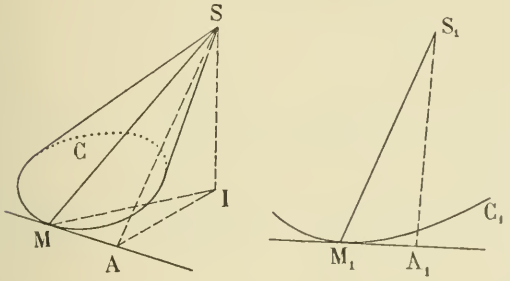
$$-\frac{2D'}{D^3} = 2f(\alpha)f'(\alpha) + 2f'(\alpha)f''(\alpha).$$

En remplaçant $f'(\alpha)$ par $-\frac{r'}{r^2}$ on tire facilement de là

$$f(\alpha) + f''(\alpha) = \frac{r^2}{D^3} \cdot \frac{D'}{r'}.$$

ce qui montre que le signe de la somme $f(\alpha) + f''(\alpha)$ est le même que celui du produit $\frac{r^2}{D^3} \cdot \frac{D'}{r'}$, ou encore le même que celui du rapport $\frac{D'}{r'}$, puisque $r^2$ et $D^3$ sont positifs.

Par conséquent, en vertu de ce qui a été rappelé plus haut, si $r$ est positif, la courbe, au point M, est concave ou convexe vers le pôle suivant que D et $r$ varient dans le même sens ou en sens contraires ; c'est le contraire si $r$ est négatif. Enfin si $r'$ n'est pas nulle, c'est-à-dire si la normale en M ne passe pas par le pôle, le point M est un point d'inflexion quand on a $D' = 0$, c'est-à-dire quand la distance D est maxima ou minima.




Cela posé, supposons que l'on ait développé sur un plan la surface latérale d'un cône S, et soit $C_1$ la transformée de la section C faite dans le cône par un plan P. Appelons $S_1$ la position du point S dans le développement, M un point quelconque de la courbe C et $M_1$ le point correspondant de la transformée. Menons en M et en $M_1$ les tangentes respectives aux deux courbes C et $C_1$ ainsi que les perpendiculaires SA, $S_1A_1$ à ces tangentes. On sait que les deux triangles rectangles SMA, $S_1M_1A_1$ sont égaux, de sorte que l'on a

$$SM = S_1M_1, \qquad SA = S_1A_1 ;$$

par suite, au point $M_1$ la courbe $C_1$ sera concave ou convexe vers le point $S_1$ suivant que SM et SA varieront dans le même sens ou en sens contraires, car il est toujours permis de supposer, ici, que le rayon vecteur est positif.

Or, soit SI la perpendiculaire menée par le point S sur le plan P. Les deux triangles rectangles en I, SMI et SAI montrent que SM et SA varient respectivement dans le même sens que IM et que IA. D'ailleurs IM est le rayon vecteur qui va du point I au point M de la courbe C, tandis que IA est la perpendiculaire menée du point I sur la tangente en M. Donc, au point $M_1$, la courbe $C_1$ est concave ou convexe vers le point $S_1$ suivant que IM et IA varient dans le même sens ou en sens contraires, c'est-à-dire, suivant qu'au point M la courbe C est concave ou convexe vers le point I.

Les points d'inflexion de la courbe $C_1$ sont donc ceux qui correspondent aux points M de la courbe C pour lesquels IA est maximum ou minimum sans que IM soit normale à la courbe C. D'ailleurs si IM n'est pas normale à la courbe C, IA ne peut être maximum ou minimum que dans les deux cas suivants :

1° Si le point M est un point d'inflexion de la courbe C ; 2° si MA passe par le point I. En résumé, les points d'inflexion de la courbe $C_1$ correspondent, soit aux points d'inflexion de la courbe C, soit aux points de contact de cette courbe avec les tangentes qu'on peut lui mener par le point I pied de la perpendiculaire menée du point S sur le plan de la courbe C.

Nous retrouvons ainsi le résultat bien connu. Ajoutons que ce résultat, établi pour le cône, s'applique au cylindre considéré comme cas limite du cône.

## SUR LE CYLINDROÏDE

Par M. **C. Roubaudi**, professeur au lycée Buffon.

En partant de la définition du conoïde de Plücker donnée par M. Appell et en se servant de l'équation à laquelle il est parvenu[1], on établit aisément, pour cette surface, la propriété caractéristique que voici :

(1) Voir le n° 9 de la *Revue*.

*Une directrice curviligne du cylindroïde est une ellipse qui se projette sur le plan directeur suivant une circonférence passant par le pied de la directrice rectiligne.*

Remarquons d'abord qu'on peut déterminer $\lambda$ [1], de façon que l'équation

$$(a-\lambda)y^2+hxy+(c-\lambda)x^2=0$$

représente deux droites confondues ; il suffit pour cela de faire

$$4(a-\lambda)(c-\lambda)-h^2=0,$$

équation qui donne toujours deux valeurs réelles pour $\lambda$. Si l'on prend la droite double ainsi obtenue pour nouvel axe des $x$, l'équation prend la forme simple

$$(1)\qquad z=\frac{2hy^2}{x^2+y^2}.$$

Cela posé, coupons cette surface par un cylindre de révolution passant par l'axe des $z$, qui est la directrice rectiligne du conoïde. Un tel cylindre a pour équation

$$(2)\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0,$$

et la projection de l'intersection sur le plan des $yz$ s'obtient en éliminant $x$ entre les équations (1) et (2). L'équation (2) peut s'écrire, en tenant compte de (1),

$$hy^2-\beta yz=\alpha xz\,;$$

de là on tire la valeur de $x$ que l'on porte dans l'équation (1) et l'on obtient ainsi en supprimant le facteur $y^2$ qui correspond à la droite double du conoïde, l'équation

$$(hy-\beta z)^2-\alpha^2 z(2h-z)=0,$$

qui représente une ellipse.

Réciproquement, soit l'ellipse qui a pour équations

$$(3)\qquad Ax+By+Cz+D=0,\qquad x^2+y^2-2\alpha x-2\beta y=0.$$

Les équations d'une génératrice du conoïde droit qui a pour directrices cette ellipse et l'axe des $z$, sont de la forme

$$(4)\qquad z=\lambda,\qquad y=mx.$$

En exprimant que cette droite s'appuie sur l'ellipse (3), on a

$$(5)\qquad \left(\frac{C\lambda+D}{A+Bm}\right)^2(1+m^2)+2\,\frac{C\lambda+D}{A+Bm}(\alpha+m\beta)=0.$$

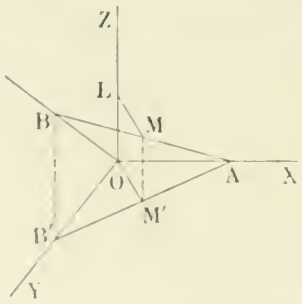
Lorsque les paramètres $\lambda$ et $m$ varient en satisfaisant à la relation (5), la droite (4) engendre le conoïde ; l'équation de celui-ci s'obtiendra donc en éliminant $\lambda$ et $m$ entre les trois équations (4) et (5), ce qui donne, en supprimant le plan $z=-\frac{D}{C}$, correspondant au point de rencontre des deux directrices,

$$(Cz+D)(x^2+y^2)+2(Ax+By)(\alpha x+\beta y)=0\,;$$

cette équation peut se mettre sous la forme

$$z=\frac{ay^2+hxy+cx^2}{x^2+y^2},$$

qui est bien celle du cylindroïde.




**Exercices.** — La propriété que nous venons d'établir, donne immédiatement la solution des deux questions suivantes, dont la première a été proposée par M. Appell :

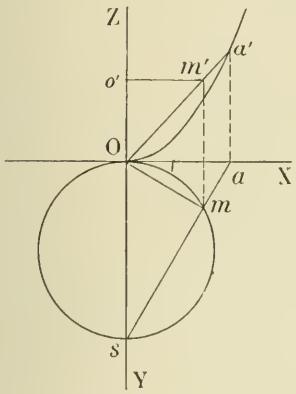
I. — *Lieu des perpendiculaires communes à l'axe des $z$ et à une droite variable rencontrant l'axe des $x$ en un point fixe A et située dans le plan bissecteur $y=z$.*

Soit LM la perpendiculaire commune à OZ et à une droite quelconque AB du plan bissecteur ; en projection sur le plan directeur XOY, les deux droites OM et AB′ sont rectangulaires, et par suite le lieu du

[1] Voir la note de M. Appell.

point M′ est la circonférence décrite sur OA comme diamètre. Le lieu du point M est donc une ellipse qui rencontre OZ et cette ellipse peut servir de seconde directrice. Donc le lieu cherché est un conoïde de Plücker.

II. — *Lieu des perpendiculaires communes à l'axe* OZ *d'une parabole tracée dans le plan* XOZ *avec le sommet* O, *et aux génératrices d'un cône ayant pour directrice cette parabole et pour sommet un point* S *de l'axe des* Y.




Soit $(om, o'm')$ la perpendiculaire commune à OZ et à une génératrice quelconque $(sa, oa')$ du cône; en projection horizontale sur le plan XOY, les deux droites $sa$ et $om$ sont rectangulaires, et par suite le lieu du point $m$ est la circonférence décrite sur $os$ comme diamètre. Dans l'espace, le lieu du point M est l'intersection du cylindre droit qui a pour base cette circonférence avec le cône donné. Or, ces deux quadriques ont en commun la verticale du point $s$ et le même plan tangent suivant cette génératrice ; leur intersection se complète donc par une courbe plane qui est nécessairement une ellipse. Cette ellipse, évidemment située dans un plan passant par OX, peut servir de seconde directrice au conoïde. Donc celui-ci est encore un cylindroïde.

*Remarque.* — On peut apercevoir beaucoup plus rapidement la première partie, en remarquant que tout plan passant par une génératrice du conoïde, coupe encore cette surface suivant une ellipse qui a pour projection sur le plan directeur un cercle passant au pied de l'axe. E.H.

---

## NOTE SUR LES FONCTIONS HYPERBOLIQUES

Par M. **J. David**, professeur au collège de Lectoure.

On sait que les coordonnées d'un point d'une hyperbole rapportée à ses axes de symétrie sont données par

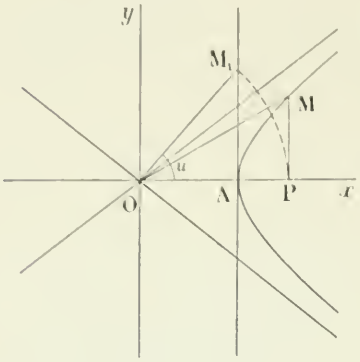
$$(1)\quad \begin{cases} x = \pm a\,\dfrac{e^{\varphi}+e^{-\varphi}}{2} = \pm a\,\mathrm{Ch}\,\varphi, \\ y = b\,\dfrac{e^{\varphi}-e^{-\varphi}}{2} = b\,\mathrm{Sh}\,\varphi, \end{cases}$$

et que l'on peut déterminer un angle $u$ tel que

$$(2)\quad \begin{cases} \mathrm{Ch}\,\varphi = \sec u, \\ \mathrm{Sh}\,\varphi = \mathrm{tg}\,u. \end{cases}$$

Je me propose, dans cette note, de donner une représentation géométrique de l'argument $\varphi$ et de montrer ensuite la relation également géométrique qui existe entre cet argument et l'angle $u$.

Considérons, pour fixer les idées, l'arc de courbe situé dans le premier angle des axes, et calculons l'aire du secteur hyperbolique OAM. Désignons-la par $\alpha$.




$$\alpha = \frac{xy}{2} - \int_a^x y\,dx,$$

$$y\,dx = ab\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\; d \cdot \frac{x}{a},$$

$$\int y\,dx = ab \int \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}\; d \cdot \frac{x}{a},$$

$$= ab \int \sqrt{t^2 - 1}\; dt,$$

en posant $\frac{x}{a} = t.$

Or on a

$$\int \sqrt{t^2 - 1}\; dt = t\sqrt{t^2 - 1} - \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t^2 - 1}},$$

$$= t\sqrt{t^2 - 1} - \int \frac{(t^2 - 1)dt}{\sqrt{t^2 - 1}} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}},$$

d'où

$$2\int \sqrt{t^2 - 1}\; dt = t\sqrt{t^2 - 1} - \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}.$$

$$= t\sqrt{t^2 - 1} - \text{Arg. Ch } t + \text{C},$$

et, par suite,

$$\alpha = \frac{xy}{2} - \frac{bx}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} + \frac{ab}{2}\,\text{Arg. Ch } \frac{x}{a} + \text{C}.$$

Déterminons la constante C.

Pour $x = a$ et $y = 0$, $\alpha = 0$. On a donc $\text{C} = 0$.

De plus

$$\frac{bx}{2}\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} = \frac{xy}{2}.$$

Par conséquent,

$$\alpha = \frac{ab}{2} \cdot \text{Arg. Ch } \frac{x}{a}, \qquad \frac{2\alpha}{ab} = \text{Arg. Ch } \frac{x}{a},$$

$$\frac{x}{a} = \text{Ch } \frac{2\alpha}{ab}, \qquad x = a.\ \text{Ch } \frac{2\alpha}{ab};$$

et, par suite, en identifiant avec $x = a\,\text{Ch } \varphi$, on a :

$$\varphi = \frac{2\alpha}{ab}.$$

L'argument $\varphi$ est le rapport du double de la surface du secteur hyperbolique OAM à la surface du rectangle construit sur les deux demi-axes.

*Remarque.* — Si l'hyperbole est équilatère, et si l'on prend pour unité de longueur le demi-axe transverse, on aura $\varphi = 2\alpha$.

Soit maintenant P le pied de l'ordonnée du point M; menons la tangente au sommet et prenons sur cette tangente un point $M_1$ tel que $OM_1 = OP$. Soit $u$ l'angle de $OM_1$ avec l'axe des $x$. On a

$$OM_1 = OA \text{ séc } u \qquad \text{ou} \qquad x = a \text{ séc } u,$$

et en remplaçant dans l'équation de la courbe

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

$\frac{x}{a}$ par séc $u$, nous avons $y = \pm\, b \text{ tg } u$. Dans le cas particulier où nous nous sommes placés,

$$y = b \text{ tg } u.$$

On voit facilement sur quelle tangente au sommet et dans quel sens doit être porté le point $M_1$ suivant la position du point M sur la courbe.

Donc lorsqu'on connaîtra l'argument $\varphi$, on pourra construire l'angle $u$, et réciproquement, quand on connaîtra l'angle $u$, on pourra déterminer l'argument $\varphi$.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**338.** — *On considère une ellipse et un cercle concentrique de rayon* R.

1° *Déterminer* R *de manière qu'un triangle isocèle inscrit dans l'ellipse et ayant pour sommet un des sommets du grand axe soit circonscrit au cercle.*

2° *Le rayon* R *ayant été ainsi déterminé, on prend sur l'ellipse un point quelconque* A, *et de ce point on mène au cercle deux tangentes qui rencontrent l'ellipse en* B *et* C. *Démontrer que la droite* BC *est tangente au cercle en un point* A'.

3° *On joint* A *et* A' ; *démontrer que lorsque le point* A *se déplace sur l'ellipse, la droite* AA' *reste normale à une ellipse fixe. Trouver les grandeurs des axes de cette ellipse et calculer les coordonnées du point où* AA' *est normale à cette ellipse.*

1° Les axes de coordonnées étant les axes de l'ellipse, une tangente menée par le sommet $(a, 0)$ au cercle

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0$$

a pour équation

$$y = m(x - a),$$

et on détermine $m$ en écrivant que cette droite est à la distance R de l'origine, ce qui donne

$$m = \pm \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}}.$$

Prenons la tangente

$$y = \frac{R}{\sqrt{a^2 - R^2}}(x - a);$$

elle rencontre l'ellipse en deux points dont les abscisses sont racines de l'équation

$$\frac{R^2(x-a)^2}{b^2(a^2 - R^2)} + \frac{x^2}{a^2} - 1 = 0;$$

elle admet la racine $a$, et une autre racine qui doit être égale à $-R$ ; on doit donc avoir

$$\frac{R^2(-R-a)}{b^2(a^2 - R^2)} + \frac{-R+a}{a^2} = 0,$$

ou, en supprimant le facteur $a + R$,

$$a^2R^2 - b^2(a - R)^2 = 0,$$

$$[aR + b(a - R)][aR - b(a - R)] = 0.$$

En égalant le premier facteur à zéro, on a pour R une valeur négative ; le second facteur donne

$$R = \frac{ab}{a + b}.$$

2° Soient $\alpha$, $\beta$ les coordonnées d'un point A de l'ellipse ; on aura

$$(1) \qquad \frac{\alpha^2}{a^2} + \frac{\beta^2}{b^2} - 1 = 0.$$

L'ensemble des tangentes menées du point A au cercle a pour équation

$$(\alpha x + \beta y - R^2)^2 - (x^2 + y^2 - R^2)(\alpha^2 + \beta^2 - R^2) = 0.$$

Pour avoir l'équation de la droite BC

$$ux + vy + w = 0,$$

on écrit que la tangente en A à l'ellipse et cette droite forment un couple de sécantes communes à l'ellipse et à l'ensemble des deux tangentes.

On aura donc l'identité suivante :

$$\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)+(\alpha x+\beta y-R^2)^2-(x^2+y^2-R^2)(\alpha^2+\beta^2-R^2)=\left(\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-1\right)(ux+vy+w)$$

ou

$$\frac{\lambda}{a^2}-\beta^2+R^2=\frac{\alpha u}{a^2},$$

$$\frac{\lambda}{b^2}-\alpha^2+R^2=\frac{\beta v}{b^2},$$

$$-\lambda+R^2(\alpha^2+\beta^2)=-w,$$

$$2\alpha\beta=\frac{\alpha v}{a^2}+\frac{\beta u}{b^2},$$

$$-2\alpha R^2=\frac{\alpha w}{a^2}-u,$$

$$-2\beta R^2=\frac{\beta w}{b^2}-v.$$

Des trois dernières équations on tire les valeurs de $u$, $v$, $w$. On obtient sans difficulté, en remplaçant R par sa valeur,

$$u=\frac{2ab^2\alpha}{a+b},\qquad v=\frac{2a^2b\beta}{a+b},\qquad w=\frac{2a^3b^3}{(a+b)^2}.$$

En reportant ces valeurs dans les trois premières relations d'identification, on trouve la même valeur pour $\lambda$, en tenant compte de la relation (1).

Il en résulte que l'équation de BC peut s'écrire

$$b\alpha x+a\beta y+\frac{a^2b^2}{a+b}=0,$$

ce qui démontre que cette droite est tangente au cercle au point A', dont les coordonnées sont

$$x=-\frac{b\alpha}{a+b},\qquad y=-\frac{a\beta}{a+b}.$$

3° L'équation de la droite AA' est

$$\frac{x-\alpha}{\alpha+\dfrac{b\alpha}{a+b}}=\frac{y-\beta}{\beta+\dfrac{a\beta}{a+b}},$$

ou

$$\frac{x(b+2a)}{\alpha}-\frac{y(a+2b)}{\beta}-(a-b)=0.$$

Cherchons l'équation tangentielle de l'enveloppe de cette droite ; identifions son équation avec l'équation

$$ux+vy+w=0\ ;$$

on obtient

$$\frac{u\alpha}{b+2a}=-\frac{v\beta}{a+2b}=-\frac{w}{a-b};$$

on en tire

$$\alpha=-\frac{w(b+2a)}{u(a-b)},\qquad \beta=+\frac{w(a+2b)}{v(a-b)};$$

et en portant ces valeurs dans la relation (1), on a

$$\frac{(b+2a)^2b^2}{u^2}+\frac{(a+2b)^2a^2}{v^2}-\frac{a^2b^2(a-b)^2}{w^2}=0. \tag{2}$$

Or on sait qu'étant donnée l'ellipse

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}-1=0,$$

l'équation tangentielle de la développée de cette courbe est

$$(3)\qquad \frac{A^2}{u^2}+\frac{B^2}{v^2}-\frac{(A^2-B^2)^2}{w^2}=0,$$

et que le pied de la normale $(u, v, w)$ a pour coordonnées

$$x=-\frac{A^2w}{(A^2-B^2)u},\qquad y=\frac{B^2w}{(A^2-B^2)v}.$$

Déterminons alors A et B en sorte que les équations (2) et (3) aient leurs coefficients proportionnels, et si l'on remarque que dans l'équation (2) le coefficient de $\frac{1}{u^2}$ est inférieur à celui de $\frac{1}{v^2}$, on en conclut que A sera plus petit que B, et on devra avoir

$$\frac{A}{b(b+2a)}=\frac{B}{a(a+2b)}=\frac{B^2-A^2}{ab(a-b)}.$$

On en tire sans difficulté

$$A=\frac{ab^2(b+2a)}{(a+b)(a^2+4ab+b^2)},\qquad B=\frac{b^2a(a+2b)}{(a+b)(a^2+4ab+b^2)}.$$

On en conclut que la droite AA′ est normale à l'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2b^4(b+2a)^2}+\frac{y^2}{b^4a^2(a+2b)^2}-\frac{1}{(a+b)^2(a^2+4ab+b^2)^2}=0,$$

et que le pied de cette normale a pour coordonnées

$$x=-\frac{b^2(b+2a)\alpha}{(a+b)(a^2+4ab+b^2)},\qquad y=-\frac{a^2(a+2b)\beta}{(a+b)(a^2+4ab+b^2)}.$$

E.-N. BARISIEN.

---

**404.** — *Si on coupe une courbe d'ordre $n$, $f(x, y)=0$, par deux droites quelconques, $P=0$, $Q=0$, et si on joint respectivement les points de rencontre de la première droite avec la courbe aux points de rencontre de cette courbe avec la seconde droite, ces deux groupes de $n$ points étant rapportés l'un à l'autre d'une certaine façon, arbitraire d'ailleurs, et si l'on désigne enfin par*

$$P_1=0,\qquad P_2=0,\qquad \ldots,\qquad P_n=0$$

*les équations des $n$ nouvelles droites ainsi obtenues, l'équation $f(x, y)=0$ peut prendre la forme*

$$P_1P_2\ldots P_n+k.P.Q.g(x, y)=0,$$

*$k$ étant une certaine constante, et $g(x, y)$ une fonction entière d'ordre $n-2$.*

*Énoncer géométriquement ce théorème ; en déduire des théorèmes particuliers, et appliquer aux quartiques et aux cubiques.*

Les droites $P_1=0$, $P_2=0$, $\ldots$, $P_n=0$ rencontrent la courbe $f(x, y)=0$ en $n^2$ points et, quel que soit $\lambda$, l'équation $f(x,y)+\lambda P_1P_2\ldots P_n=0$ représente une courbe d'ordre $n$ qui passe en ces $n^2$ points ; or on peut déterminer $\lambda$ de façon que cette courbe passe en un point de la droite $P=0$, autre que les $n$ points où elle rencontre la courbe $f(x, y)=0$ ; $\lambda$ étant ainsi déterminé, la droite $P=0$ rencontre cette courbe en $n+1$ points ; elle fait donc partie de cette ligne et l'on a

$$f(x, y)+\lambda P_1P_2\ldots P_n=Pf_1(x, y),$$

$f_1(x, y)$ étant une fonction entière d'ordre $n-1$ ; d'autre part la droite $Q=0$ passe par $n$ des points précédents ; elle rencontre donc la courbe $f_1(x, y)=0$ en ces $n$ points, et, par suite, elle fait tout entière partie de cette ligne nouvelle ; on a donc finalement

$$f(x, y)+\lambda P_1P_2\ldots P_n=P.Q\,g(x, y),$$

$g(x, y)$ étant une fonction entière d'ordre $n-2$. Cette identité montre que l'équation $f(x, y)=0$ peut s'écrire

$$P.Q.\varphi(x, y) - \lambda P_1 P_2 \ldots P_n = 0 ;$$

c'est au fond ce qu'il fallait démontrer.

La propriété établie peut s'énoncer ainsi :

*Si l'on coupe une courbe d'ordre $n$ par deux droites quelconques et si l'on unit d'une certaine façon les $n$ points de rencontre situés sur la première droite aux $n$ points de rencontre situés sur la seconde par $n$ autres droites, ces nouvelles droites rencontrent la courbe considérée en $n(n-2)$ nouveaux points qui sont tous situés sur une courbe d'ordre $n-2$.*

En prenant deux droites voisines l'une de l'autre et joignant deux à deux les points de rencontre qui sont voisins l'un de l'autre, on obtient à la limite un nouveau théorème que l'on peut énoncer ainsi :

*Si l'on coupe une courbe d'ordre $n$ par une droite quelconque, et si l'on mène les tangentes à la courbe aux $n$ points ainsi obtenus, ces nouvelles droites rencontrent la courbe considérée en $n(n-2)$ nouveaux points qui sont tous situés sur une courbe d'ordre $n-2$.*

Plus particulièrement, en prenant au moins l'une des deux droites à l'infini, on obtient deux autres théorèmes que l'on peut énoncer ainsi :

*Si par les $n$ points de rencontre d'une ligne droite avec une courbe d'ordre $n$, on mène respectivement $n$ parallèles aux directions asymptotiques de cette courbe, on obtient $n$ nouvelles droites qui rencontrent la courbe en $n(n-2)$ autres points, tous situés sur une courbe d'ordre $n-2$.*

*Les $n$ asymptotes d'une courbe d'ordre $n$ rencontrent cette courbe en $n(n-2)$ points à distance finie qui sont situés sur une courbe d'ordre $n-2$.*

Dans le cas particulier où l'on considère une courbe du quatrième ordre, les théorèmes que nous venons d'énoncer sont susceptibles d'énoncés élégants et utiles à connaître :

*Si l'on coupe une quartique par deux droites quelconques, et si l'on unit d'une certaine façon les quatre points de rencontre situés sur la première aux quatre points de rencontre situés sur la seconde, les quatre nouvelles droites ainsi obtenues rencontrent la courbe en huit autres points qui sont situés sur une conique.*

*Si par les quatre points de rencontre d'une droite avec une quartique, on mène les tangentes à cette courbe, ces nouvelles droites rencontrent la quartique en huit autres points qui sont situés sur une conique.*

*Si par les quatre points de rencontre d'une droite avec une quartique, on mène respectivement des parallèles aux directions asymptotiques de cette courbe, les quatre nouvelles droites rencontrent la courbe en huit autres points qui sont situés sur une conique.*

*Les asymptotes d'une quartique rencontrent cette courbe en huit points à distance finie qui sont situés sur une conique.*

Enfin dans le cas particulier où la courbe considérée est une cubique, on obtient les remarquables propriétés qui suivent :

*Si l'on coupe une cubique par deux droites quelconques, et si l'on unit les points de rencontre de la première aux points de rencontre de la seconde, d'une façon quelconque, par trois nouvelles droites, ces droites rencontrent la cubique en trois autres points qui sont en ligne droite.*

*Si par les points de rencontre d'une cubique avec une droite on mène les tangentes à cette courbe, ces droites rencontrent la cubique en trois autres points qui sont en ligne droite.*

Il résulte de ce second théorème que si deux des points de rencontre sont les points d'inflexion, le troisième est aussi un point d'inflexion. De là ce théorème important : *les points d'inflexion d'une cubique sont trois à trois en ligne droite.* Si deux de ces points sont réels, il y en a nécessairement un troisième qui est réel. Si deux de ces points sont imaginaires conjugués, la droite qui les unit passe par un point d'inflexion réel.

*Si par les points de rencontre d'une droite et d'une cubique, on mène respectivement des parallèles aux directions asymptotiques de cette courbe, ces trois droites rencontrent la cubique en trois nouveaux points qui sont en ligne droite.*

*Les trois asymptotes d'une cubique rencontrent cette courbe en trois points à distance finie qui sont en ligne droite.*

Lorsque, parmi les asymptotes d'une cubique, deux sont inflexionnelles, la troisième est aussi inflexionnelle.

A. LAUREAUX, à Besançon.

## ANALYSE

**224.** — *Un bassin rectangulaire, dont la base a une surface* S, *est alimenté par un robinet qui y déverse un volume d'eau égal à* Q *pendant l'unité de temps. Un orifice d'écoulement ayant une section* $s$ *est percé dans le fond de ce bassin. On demande comment variera la hauteur* $h$ *de l'eau dans le bassin à partir d'une valeur initiale* $h_0$, *et, en particulier, pour quelle valeur de* $h$ *le niveau restera stationnaire. La vitesse d'écoulement du liquide par l'orifice sera supposée égale à* $\sqrt{2gh}$, $g$ *étant l'accélération due à la pesanteur.*

(*Ecole des Ponts et Chaussées, 1892. Elèves externes.*)

Nous prendrons pour origine des temps le moment où le liquide a la hauteur $h_0$, et nous désignerons par $h$ la hauteur à l'époque $t$. Calculons alors l'accroissement de hauteur, pendant le temps $dt$, de l'époque $t$ à l'époque $t+dt$.

Si le robinet coulait seul, le volume d'eau augmenterait de $Q\,dt$, et, par suite, la hauteur, de $\frac{Q\,dt}{S}$; au contraire, si l'orifice donnait seul passage à l'eau, le volume diminuerait de $s\sqrt{2gh}\,dt$, et, par suite, la hauteur, de $\frac{s}{S}\sqrt{2gh}\,dt$. La hauteur a donc augmenté de

$$dh = \left(\frac{Q}{S} - \frac{s\sqrt{2gh}}{S}\right)dt.$$

Cette équation donne $dt$ en fonction de $h$ et de $dh$; nous aurons le temps lui-même en intégrant la différentielle ainsi obtenue,

$$t = S\int_{h_0}^{h} \frac{dh}{Q - s\sqrt{2gh}}.$$

Posons alors $h = \lambda^2$; nous aurons $dh = 2\lambda\,d\lambda$, et, par suite,

$$t = 2S\int_{\sqrt{h_0}}^{\lambda} \frac{\lambda\,d\lambda}{Q - s\sqrt{2g}\,\lambda},$$

ou

$$t = K\int_{\sqrt{h_0}}^{\lambda} \frac{\lambda\,d\lambda}{H - \lambda},$$

en désignant par K et H les deux constantes positives $\frac{2S}{s\sqrt{2g}}$ et $\frac{Q}{s\sqrt{2g}}$.

Or $\frac{\lambda}{H-\lambda}$ peut s'écrire $-1 + \frac{H}{H-\lambda}$; donc l'intégrale indéfinie $\int \frac{\lambda\,d\lambda}{H-\lambda}$ est immédiate et a pour expression $-\lambda - H\,\mathrm{L}.(H-\lambda) + C^{te}$. Nous en déduisons de suite l'intégrale définie cherchée et nous obtenons ainsi

$$t = K(\sqrt{h_0} - \lambda) - KH.\mathrm{L}\frac{H-\lambda}{H-\sqrt{h_0}}.$$

Cela posé, remarquons que nous pouvons toujours choisir $\lambda$ positif, car il suffit que $\lambda^2 = h$, et

qu'alors $\lambda$ et $h$ varient dans le même sens. Il nous suffira donc d'étudier les variations de $\lambda$ en fonction du temps, quand $t$ croît de $0$ à $+\infty$, et même de ne considérer que les valeurs positives de $\lambda$. A cet effet nous étudierons la fonction inverse de celle-ci, $t$ exprimé en fonction de $\lambda$.

Si $\sqrt{h_0}$ est plus petit que $H$, il faudra, pour que cette fonction soit définie, que $\lambda < H$; $\lambda$ ne variera donc qu'entre $0$ et $H$; d'ailleurs la dérivée de $t$ en fonction de $\lambda$ est $\frac{K\lambda}{H-\lambda}$; elle est positive dans tout cet intervalle; donc la fonction est croissante, $h$ et $t$ augmentent en même temps; mais $h$ n'atteint la valeur $H^2$ qu'au bout d'un temps infini.

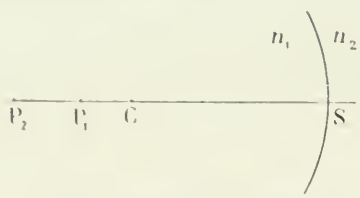
Si $\sqrt{h_0} > H$, il faudra aussi $\lambda > H$. Pour ces valeurs la dérivée de $t$ est négative et la fonction décroissante; $t$ et $h$ varient en sens contraire; donc, puisque le temps va toujours en augmentant, la hauteur diminue et tend vers $H^2$; elle n'atteint d'ailleurs cette valeur qu'au bout d'un temps infini.

Il résulte de cette discussion que si $\sqrt{h_0} = H$, le niveau ne varie pas. Cela est évident *a priori* puisque dans cette hypothèse $dh$ est nul. Dans ce cas l'intégrale définie n'est pas calculable, puisque $L(H - \sqrt{h_0})$ n'a aucun sens.

# PHYSIQUE

## NOTE SUR LES FORMULES GÉNÉRALES DES LENTILLES

*Cas d'une surface.* — Considérons une surface sphérique réfringente de centre C séparant deux milieux d'indices $n_1$ et $n_2$, un point lumineux $P_1$, réel sur la figure, situé dans le premier milieu, et son image $P_2$, virtuelle sur la figure, dans le second milieu. Le point S étant la trace de l'axe secondaire $P_1C$ sur la surface, on démontre, en ne considérant que les rayons lumineux voisins de cet axe, la relation connue




$$\frac{n_1}{SP_1} - \frac{n_2}{SP_2} = \frac{n_1 - n_2}{SC}.$$

On représente généralement les segments $SP_1$, $SP_2$, SC, par les lettres $p_1$, $p_2$, $r$; mais il est souvent utile de laisser chacun d'eux représenté par les deux lettres qui désignent ses extrémités : tous les auteurs, en effet, n'attribuent pas la même signification aux notations $p_1$, $p_2$, $r$, ce qui peut amener de la confusion dans l'esprit des élèves; la relation écrite ci-dessus est, au contraire, indépendante de toute convention à ce sujet : elle est simplement conforme à la notation des segments telle qu'on l'applique en géométrie.

Si, au lieu de prendre le point S pour origine des segments, on prend le point C qui jouit, comme le point S, de la propriété d'être à lui-même son conjugué, on trouve une relation de même forme,

$$\frac{n_1}{CP_2} - \frac{n_2}{CP_1} = \frac{n_1 - n_2}{CS},$$

qui ne diffère de la précédente, indépendamment du changement d'origine, que par la permutation des indices. Cette formule, moins usitée que la première, parce qu'elle ne trouve pas son application dans la théorie générale des lentilles, est néanmoins utile à connaître.

Dans le cas d'une surface réfléchissante, les deux relations prennent exactement la même forme : P et P' désignant, dans ce cas, le point lumineux et son image, on a

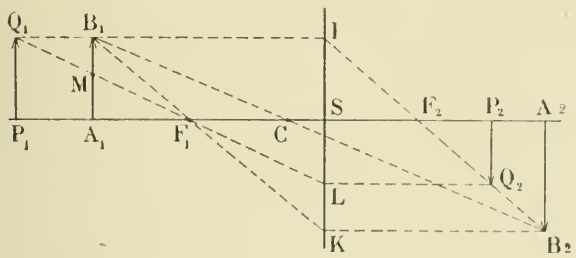
$$\frac{1}{SP} + \frac{1}{SP'} = \frac{2}{SC},$$

ou bien

$$\frac{1}{CP} + \frac{1}{CP'} = \frac{2}{CS}.$$

*Cas d'un système quelconque.* — Quand l'existence de l'image d'un point lumineux a été établie pour une seule surface, elle se trouve démontrée pour un nombre quelconque de surfaces réfringentes ou réfléchissantes.

Considérons, en particulier, un système d'épaisseur négligeable, S, formé de surfaces réfringentes centrées sur un même axe, et séparant deux milieux d'indices quelconques. Soient $F_1$ et $F_2$ les deux foyers principaux, c'est-à-dire les images de points situés à l'infini sur l'axe dans les milieux extrêmes. Imaginons un même objet perpendiculaire à l'axe, placé successivement en $A_1B_1$ et en $P_1Q_1$. A l'aide des foyers, construisons, comme l'indique la figure, ses images successives $A_2B_2$ et $P_2Q_2$. Nous obtiendrons la relation la plus générale entre les positions des points conjugués $P_1$ et $P_2$ et celles des foyers $F_1$ et $F_2$ en rapportant ces positions respectivement aux origines, conjuguées elles-mêmes, $A_1$ et $A_2$. Or la figure met en évidence les égalités suivantes :




$$\frac{A_1F_1}{A_1P_1} = \frac{MA_1}{MB_1} = \frac{LS}{LK} = \frac{Q_2F_2}{Q_2B_2} = \frac{P_2F_2}{P_2A_2} = \frac{A_2F_2 - A_2P_2}{-A_2P_2},$$

d'où

$$\frac{A_1F_1}{A_1P_1} + \frac{A_2F_2}{A_2P_2} = 1.$$

Le point S étant à lui-même son conjugué, nous pouvons le substituer aux points $A_1$ et $A_2$, ce qui donne la formule usuelle

$$\frac{SF_1}{SP_1} + \frac{SF_2}{SP_2} = 1.$$

Si l'on trace la droite $B_1B_2$, le point C où elle rencontre l'axe est fixe, car $F_1C$ est égal à $SF_2$ comme devant être dans le même rapport avec $KB_2$. Le point C est donc un centre optique qu'on peut aussi prendre pour origine :

$$\frac{CF_1}{CP_1} + \frac{CF_2}{CP_2} = 1.$$

Pour avoir l'équation de Newton, nous prendrons pour origines les foyers. Or on a

$$\frac{F_1P_1}{F_1A_1} = \frac{A_1B_1}{A_1M} = \frac{SK}{SL} = \frac{F_2B_2}{F_2Q_2} = \frac{F_2A_2}{F_2P_2},$$

d'où

$$F_1P_1 . F_2P_2 = F_1A_1 . F_2A_2,$$

et, en particulier,

$$F_1P_1 . F_2P_2 = F_1S . F_2S,$$

équation usuelle, ou bien

$$F_1P_1 . F_2P_2 = F_1C . F_2C.$$

En confondant les deux foyers, on a des formules applicables à un miroir sphérique.

En confondant les points C et S, on a des formules applicables aux lentilles minces ordinaires.

Enfin si, au lieu d'un système mince, il s'agit d'un système épais, on démontrera l'existence des plans principaux, ce qui permettra ensuite de faire des constructions analogues aux précédentes et d'établir les relations entre les positions des points conjugués en prenant pour origines :

soit deux points conjugués quelconques,

soit les deux points principaux, qui remplacent le point S du cas précédent,

soit les deux points nodaux, qui remplacent le centre optique des systèmes minces,

soit les deux foyers principaux.

C. R.

## CONCOURS DE 1895 (*Suite*)

### AGRÉGATION DES SCIENCES MATHÉMATIQUES

*Mathématiques élémentaires.*

On donne un triangle T et on considère le triangle T′ qui a pour sommets les projections orthogonales d'un point M sur les côtés du triangle T.

1° Démontrer que, si le point M décrit une droite Δ dans le plan du triangle T, les côtés du triangle T′ enveloppent trois paraboles P, $P_1$, $P_2$.

Ces paraboles sont inscrites dans un même angle ; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point ?

2° Comment faut-il choisir la droite Δ pour que les directrices des trois paraboles P, $P_1$, $P_2$ concourent en un même point H à distance finie ?

La droite Δ se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point H.

3° Démontrer que, si l'on fait tourner la droite Δ autour d'un point fixe K, la directrice de la parabole P passe elle-même par un point fixe I.

Trouver l'enveloppe de la droite KI lorsque l'un des points K ou I décrit une droite donnée.

4° A un point K correspondent trois points, I, $I_1$, $I_2$, relatifs aux directrices des paraboles P, $P_1$, $P_2$.

On demande quelle position doit occuper le point K pour que les trois points I, $I_1$, $I_2$ soient en ligne droite et on propose de démontrer que, si le point K se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite $I I_1 I_2$ tourne autour d'un point fixe.

(*1 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Mathématiques spéciales.*

**433.** — On donne un ellipsoïde E qui, rapporté à ses plans principaux, a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$$

et une sphère de rayon $r$ et de centre A $(x_0, y_0, z_0)$.

On considère les quadriques S qui sont tangentes à tous les plans tangents communs à la sphère et à l'ellipsoïde E ; du point A on abaisse une normale AP sur l'une des quadriques S, et au pied P de cette normale on mène le plan tangent H à cette quadrique.

1° Prouver que le plan H est le plan polaire du point A par rapport à une surface $H_\rho$, homofocale à l'ellipsoïde E, représentée par l'équation

$$H_\rho=\frac{x^2}{a^2-\rho}+\frac{y^2}{b^2-\rho}+\frac{z^2}{c^2-\rho}-1=0.$$

2° Prouver que le plan H est le plan polaire du point A par rapport à l'une des quadriques S ; prouver qu'il est aussi un plan principal pour une autre de ces quadriques. Les réciproques de ces propositions sont-elles vraies ?

3° Par tout point M de l'espace il passe trois plans H polaires du point A par rapport à trois quadriques $H_\lambda$, $H_\mu$, $H_\nu$ du système homofocal. Exprimer les coordonnées du point M en fonction des paramètres $\lambda$, $\mu$, $\nu$.

Déduire des expressions ainsi obtenues le lieu des points M pour lesquels les trois plans H sont rectangulaires.

4° Trouver ce que deviennent les expressions des coordonnées du point M, soit quand ce point est sur la développable enveloppée par le plan H, soit quand il se trouve sur l'arête de rebroussement de cette développable. En conclure le degré de la développable et la nature de son arête de rebroussement.

5° Tout plan H coupe la développable suivant la génératrice de contact et suivant une conique. De quelle espèce est cette conique ? En connaît-on des tangentes remarquables ?

6° Trouver le lieu des foyers de ces diverses coniques.

(*5 juillet, de 7 h. à 2 h.*)

*Composition sur l'analyse et ses applications géométriques.*

On considère la courbe C représentée par l'équation

$$(x^2+y^2)(x^2+2axy+y^2)+xy=0,$$

où $a$ désigne un paramètre arbitraire.

Le paramètre $a$ ayant une valeur quelconque :

1° Déterminer le genre de la courbe C ;

2° Former les intégrales abéliennes de première espèce relatives à cette courbe ;

3° Former une intégrale de troisième espèce devenant infinie au point double de la courbe C ;

4° Écrire à l'aide de ces intégrales, par l'application du théorème d'Abel, les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe C soient en ligne droite, ainsi que les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe C soient sur la même conique.

Examiner le cas particulier où la droite et la conique passent par le point double de la courbe C ;

5° Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe C en quatre points $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$ ;

6° Déterminer les valeurs du paramètre $a$ pour lesquelles le genre de la courbe C s'abaisse.

On étudiera en particulier l'hypothèse $a = 0$, et l'on résoudra les problèmes suivants pour la courbe particulière D qui correspond à cette hypothèse.

I. Que deviennent, pour la courbe D, les intégrales de première espèce relatives à la courbe générale C ?

II. Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que quatre points de la courbe D soient en ligne droite et les conditions nécessaires et suffisantes pour que huit points de cette courbe D soient sur une conique.

III. Trouver combien il y a de systèmes de coniques touchant la courbe D en quatre points : $M_1$, $M_2$, $M_3$, $M_4$.

IV. Déterminer les points d'inflexion et les tangentes doubles de la courbe D.

*(6 juillet, de 7 h. à 2 h.)*

*Composition de mécanique rationnelle.*

On considère un corps solide S pesant, ayant la forme d'un cône droit dont le rayon de base est R. Le centre de gravité de ce corps est situé en un point O de l'axe de révolution du cône, à une distance R de sa base. L'ellipsoïde d'inertie du corps S relatif au centre de gravité O est une sphère.

Le cône S est mobile autour de son centre de gravité O, suppposé fixe, et la circonférence de sa base est tangente à un plan horizontal fixe H situé au-dessous du point O à une distance R de ce point.

Étudier le mouvement du corps S en supposant que la circonférence de base du cône glisse avec frottement sur le plan H.

Calculer la réaction du plan H et celle du point fixe O.

*Conditions initiales.* — Soient OO′ la perpendiculaire abaissée du point O sur le plan H et OC la position initiale de la perpendiculaire abaissée du point O sur la base du cône :

A l'époque $t = 0$, l'axe instantané de rotation est situé dans l'angle COO′, et le sens de la rotation initiale est choisi de telle sorte que le corps S appuie sur le plan H.

*(8 juillet, de 7 h. à 2 h.)*

## QUESTIONS PROPOSÉES

**434.** — On donne une hyperbole équilatère (H). On lui mène une tangente quelconque, qui rencontre les asymptotes en A et B. En ces points, on mène aux asymptotes des perpendiculaires qui rencontrent l'hyperbole en $\alpha$ et $\beta$.

1° Démontrer que $\alpha\beta$ est parallèle à AB et que quand AB varie en restant tangente à l'hyperbole (H), $\alpha\beta$ enveloppe une hyperbole équilatère homothétique et concentrique à l'hyperbole (H).

2° Par les quatre points A, $\alpha$, B, $\beta$ passe une seule parabole (P) en outre du couple de droites parallèles AB et $\alpha\beta$ ; démontrer que la seconde sécante commune $\alpha'\beta'$ à cette parabole et à l'hyperbole (H) est parallèle à AB et que quand AB varie en restant toujours tangente à l'hyperbole (H), $\alpha'\beta'$ enveloppe aussi une hyperbole équilatère homothétique et concentrique à l'hyperbole (H).

3° Lieux des centres des sécantes communes à l'hyberbole (H) et à la parabole (P), autres que celui du couple $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$ quand AB varie en restant assujettie à la même condition.

4° Par un point M du plan passent quatre paraboles telles que la parabole (P). Les quatre points de contact des tangentes à l'hyperbole (H) qui leur correspondent sont à l'intersection de l'hyperbole (H) et d'une certaine ellipse (E).

Lieu des points M tels que l'ellipse (E) correspondante devienne un cercle, lieu du centre et enveloppe de ce cercle.

5° Démontrer que le centre de gravité des quatre points d'intersection de l'ellipse (E) et de l'hyperbole (H) décrit une parallèle à une asymptote de cette dernière hyperbole, lorsque le point M décrit une parallèle à l'autre asymptote.

J. Hus, répétiteur au lycée d'Orléans.

**435.** — On considère un triangle ABC et une droite (D) ; par un point M, quelconque dans le plan du triangle, il passe deux coniques circonscrites au triangle et tangentes à la droite (D).

1° Trouver le lieu des points M pour lesquels les deux coniques qui passent par chacun de ces points ont pour tangentes en A deux droites conjuguées harmoniques par rapport à AB et AC ; montrer qu'alors les tangentes en M sont aussi conjuguées harmoniques par rapport à MB et MC.

2° Si on fait jouer successivement aux trois sommets le rôle du point A, on obtient trois coniques pour lieux correspondants du point M ; montrer qu'elles sont bitangentes deux à deux et étudier la nature de chacune d'elles, d'après la position de la droite (D).

3° Trouver l'enveloppe des polaires d'un point P par rapport aux coniques circonscrites au triangle et tangentes à la droite (D), et montrer que cette enveloppe passe par trois points fixes, indépendants de la position de la droite (D).

HUGON, à Nîmes.

**436.** — Démontrer que l'on a

$$1.2.3\ldots n > \left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

et que l'on a

$$1.2.3\ldots n < \left(\frac{n}{a}\right)^n$$

si $a$ est inférieur à $e$.

# DEUXIÈME PARTIE

## GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

**371.** — *La ligne de terre $xy$ étant tracée au milieu du cadre parallèlement aux petits côtés, on décrit dans le plan horizontal deux cercles égaux (A) et (B) de 9$^{cm}$ de rayon, tangents à la ligne de terre et ayant leurs centres respectifs $a$ et $b$ à 3$^{cm}$ de part et d'autre de la ligne médiane $gh$ du cadre. Soient $(p, p')$ le point d'intersection de ces deux cercles le plus rapproché de la ligne de terre, $(s, s')$ le point dont la cote est 18$^{cm}$ et dont la projection horizontale $s$ est à l'intersection du cercle (B) et de la parallèle à la ligne de terre menée par $p$.*

*On considère : 1° Un cône dont la base est le cercle (A) dans le plan horizontal et dont le sommet est le point $(s, s')$ ; 2° Un cylindre dont la base est le cercle (B) dans le plan horizontal et dont les génératrices sont parallèles à la droite $(ps, p's')$.*

*Construire la partie de la projection horizontale de l'intersection de ces deux surfaces comprise entre les bords du cadre, et la partie de la projection verticale située au-dessus de la ligne de terre jusqu'aux bords du cadre.*

*On indiquera à l'encre rouge la construction des points et droites remarquables.*

*On supposera les deux surfaces opaques.*

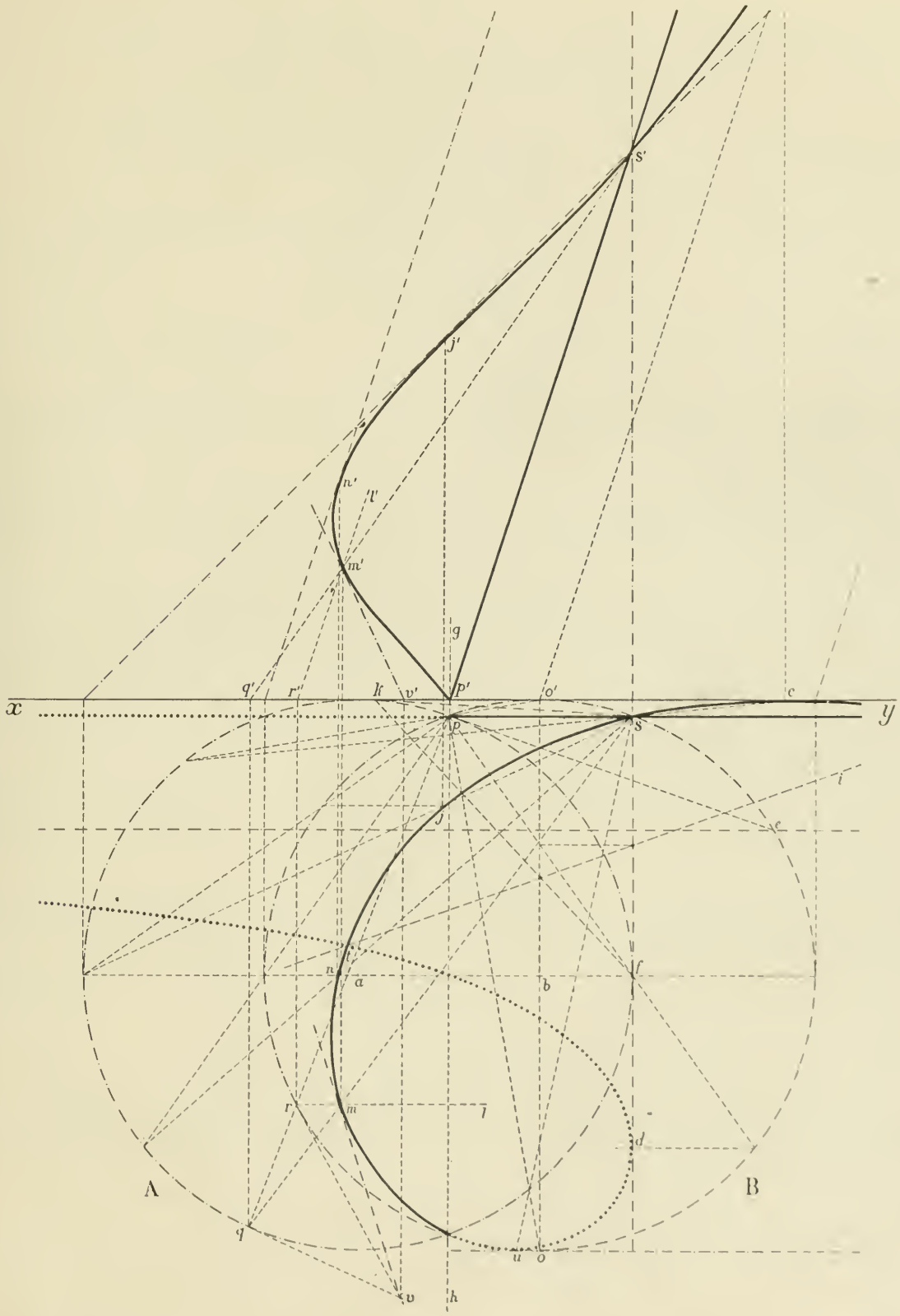
*(École centrale, 2e session, 1891.)*

Le cône et le cylindre donnés admettent une génératrice commune, la droite $ps$, $p's'$ ; leur intersection se compose de cette droite et d'une cubique gauche.

Pour construire cette courbe, nous prendrons des plans auxiliaires passant par la génératrice commune. Un de ces plans a pour trace horizontale $pq$ ; il coupe le cône suivant la génératrice $sq$, $s'q'$, et le cylindre suivant la génératrice $rl$, $r'l'$. Ces deux génératrices se rencontrent en un point $m$, $m'$ qui est un point de la cubique.

Déterminons la tangente en ce point : les plans tangents le long des génératrices SQ et RL ont pour traces horizontales $qv$ et $rv$ ; $vv'$ est donc la trace horizontale de la tangente en M à la courbe ; cette tangente se projette en $vm$, $v'm'$.

Les points $u$, $u'$ ; $j$, $j'$ ; $d$, $u$, $v$, situés sur les contours apparents, se déterminent sans difficulté ; les projections verticales de ces deux derniers se trouvent en dehors des limites de l'épure.


s'
j'
n'
l'
m'
g
q'
r'
k'
v'
p'
o'
c
x
y
p
s
i
j
e
n
a
b
f
r
m
l
d
A
B
q
u
o
v
h

Les directions asymptotiques de la courbe sont celles des génératrices parallèles du cône et du cylindre donnés ; l'une des asymptotes se confond avec la génératrice $ps$, $p's'$ ; l'autre asymptote est l'intersection avec le cylindre du plan auxiliaire limite dont la trace horizontale est $pe$.

Déterminons enfin la ligne des points doubles de la projection horizontale de la courbe. C'est la projection horizontale de l'intersection des plans des contours apparents horizontaux ; ces plans ont pour traces horizontales $kf$ et $oo'$ ; leur intersection $ti$ est la droite des points doubles, dont l'un est en dehors des limites de l'épure.

Nous supposons enlevés le cône et le cylindre. Toute la partie de la courbe située dans le premier dièdre est donc vue.

P. DUCLOS.

## ALGÈBRE

**409.** — *Trouver la relation qui doit exister entre les coefficients du polynome*

$$ax^3 + bx^2 + cx + d$$

*pour qu'il admette un diviseur du second degré de la forme* $x^2 - \lambda x + \mu$ *qui, lorsqu'on y donne à* $x$ *la valeur de la racine qui n'annule pas ce diviseur, prenne la valeur de cette racine. Trouver, dans ce cas, les trois racines du polynome.*

Désignons par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les trois racines du polynome, $\gamma$ étant celle qui est mise à part dans l'énoncé ; le diviseur du polynome que nous voulons considérer prend alors la forme

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta,$$

et la relation imposée s'écrit $\qquad \gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta = \gamma.$

Si nous ajoutons et si nous retranchons $\gamma^2$ au premier membre, cette relation s'écrit

$$2\gamma^2 - \gamma(\alpha + \beta + \gamma) + \alpha\beta - \gamma = 0 ;$$

d'autre part, nous savons que l'on a

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a} ;$$

par conséquent, nous pouvons écrire ainsi l'équation précédente :

$$2\gamma^2 + \frac{b}{a}\gamma - \frac{d}{a\gamma} - \gamma = 0,$$

ou

$$(1) \qquad 2a\gamma^3 + (b - a)\gamma^2 - d = 0.$$

Mais l'égalité $\qquad \gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta - \gamma = 0$

peut se transformer autrement : en ajoutant et retranchant $\alpha\beta$ au premier membre, puis remplaçant $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ par $\frac{c}{a}$ et $2\alpha\beta$ par $-\frac{2d}{a\gamma}$ ; nous obtenons ainsi

$$\gamma^2 - \gamma - \frac{c}{a} - \frac{2d}{a\gamma} = 0,$$

ou

$$(2) \qquad a\gamma^3 - a\gamma^2 - c\gamma - 2d = 0.$$

Le problème s'achève alors en exprimant que les équations (1) et (2) ont une racine commune et en calculant cette racine ; or en multipliant la seconde par 2 et la retranchant de la première, puis en multipliant la première par 2, en retranchant la seconde et divisant le résultat par $\gamma$, nous obtenons successivement les deux équations

$$(a + b)\gamma^2 + 2c\gamma + 3d = 0,$$
$$3a\gamma^2 + (2b - a)\gamma + c = 0.$$

Ces deux équations, regardées comme étant du premier degré par rapport à $\gamma^2$ et à $\gamma$, donnent

$$\frac{\gamma^2}{2c^2 - 6bd + 3ad} = \frac{\gamma}{9ad - ac - bc} = \frac{1}{2b^2 + ab - a^2 - 6ac} ;$$

il n'y a plus qu'à exprimer que la valeur de $\gamma^2$ est égale au carré de celle de $\gamma$ pour obtenir la relation demandée :

$$(3) \qquad (2c^2 - 6bd + 3ad)(2b^2 + ab - a^2 - 6ac) - (9ad - ac - bc)^2 = 0.$$

Le polynome proposé admet alors la racine

$$\gamma = \frac{9ad - ac - bc}{2b^2 + ab - a^2 - 6ac},$$

et les deux autres racines appartiennent au quotient que l'on obtient en divisant le polynome proposé par $x - \gamma$ ; ce sont donc les racines de l'équation

$$(4) \qquad ax^2 + (a\gamma + b)x + a\gamma^2 + b\gamma + c = 0.$$

Le problème est alors entièrement résolu.

*Remarque.* — Une fois l'équation (4) trouvée, on peut abréger la solution du problème, en adjoignant à cette équation l'équation

$$a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d = 0$$

qui est évidemment satisfaite ; ensuite il faut abaisser le système suivant au second degré :

$$2a\gamma^3 + (b - a)\gamma^2 - d = 0,$$
$$a\gamma^3 + b\gamma^2 + c\gamma + d = 0.$$

Ce dernier calcul se fait aussi simplement que celui que nous avons déjà fait en combinant les équations (1) et (2).

A. LAUREAUX, lycée de Besançon.

A résolu la question : M. F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.

---

**410.** — *Trouver les relations qui doivent exister entre les coefficients du polynome*

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + f$$

*pour qu'il admette un diviseur du second degré,* $x^2 - \lambda x + \mu$, *qui prenne les valeurs des deux racines qui ne l'annulent pas,* $\gamma$ *et* $\delta$, *quand on y fait* $x = \gamma$ *et* $x = \delta$ *ou* $x = \delta$ *et* $x = \gamma$.

*Trouver, dans ces deux cas, les racines du polynome.*

Si nous désignons par $\alpha$ et $\beta$ les deux autres racines du polynome, le diviseur que nous voulons considérer a pour expression $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$ et les deux relations imposées sont, dans le premier cas,

$$\gamma^2 - (\alpha + \beta)\gamma + \alpha\beta = \gamma,$$
$$\delta^2 - (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta = \delta.$$

Nous nous placerons dans le cas général où ces relations sont réellement distinctes, en supposant $\gamma \neq \delta$ ; elles peuvent alors être remplacées par deux autres relations qu'on obtient en retranchant celles-ci d'abord, puis en les multipliant par $\delta$ et $\gamma$ et les retranchant encore, et enfin divisant les deux résultats par $\gamma - \delta$ ; nous obtenons ainsi

$$\gamma + \delta - (\alpha + \beta) - 1 = 0,$$
$$\gamma\delta - \alpha\beta = 0.$$

Posons alors, pour abréger l'écriture,

$$\alpha + \beta = u, \qquad \alpha\beta = u', \qquad \gamma + \delta = v, \qquad \gamma\delta = v',$$

et adjoignons aux deux relations précédentes les relations qui existent entre les coefficients et les racines ; nous aurons ainsi les six équations qui suivent :

$$u + v = -\frac{b}{a}, \qquad u' + v' + uv = \frac{c}{a},$$

$$uv' + vu' = -\frac{d}{a}, \qquad u'v' = \frac{f}{a},$$

$$v - u = 1, \qquad u' - v' = 0.$$

La première et la cinquième donnent $u$ et $v$ :

$$(1)\qquad u = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+1\right), \qquad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-1\right);$$

la seconde devient alors $u + v' = \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right)$, et combinée avec la sixième, elle donne $u'$ et $v'$,

$$(2)\qquad u' = v' = \frac{c}{2a} - \frac{1}{8}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right);$$

en portant les valeurs ainsi trouvées dans la troisième et la quatrième de nos équations, nous obtiendrons les relations demandées ; mais, à cause de l'égalité $u' = v'$, la troisième équation se simplifie et devient $u'(u+v) = -\frac{d}{a}$ ou $bu' = d$, ce qui donne pour $u'$ une nouvelle valeur plus simple que celle déjà trouvée ; la quatrième équation devient $u'^2 = \frac{f}{a}$. Nous avons donc finalement les deux relations

$$(3)\qquad \begin{cases} ad^2 - fb^2 = 0, \\ \dfrac{c}{2a} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right) = \dfrac{d}{b}. \end{cases}$$

Quant à la résolution de l'équation du quatrième degré, elle est immédiate, puisqu'alors les équations (1) et (2) nous donnent les valeurs de $u$, $v$, $u'$, $v'$, et que $\alpha$ et $\beta$ sont racines de

$$x^2 - ux + u' = 0,$$

$\gamma$ et $\delta$, racines de

$$x^2 - vx + v' = 0.$$

Dans le second cas, les relations imposées sont

$$\gamma^2 - (\alpha+\beta)\gamma + \alpha\beta = \delta,$$
$$\delta^2 - (\alpha+\beta)\delta + \alpha\beta = \gamma.$$

Nous nous placerons encore dans le cas général, où ces relations sont vraiment distinctes, où $\gamma \neq \delta$; alors elles peuvent être remplacées par deux autres relations qu'on obtient en retranchant d'abord celles-ci, puis en les retranchant encore l'une de l'autre, mais après les avoir multipliées respectivement par $\delta$ et $\gamma$, et enfin en divisant à chaque fois le résultat par $\gamma - \delta$ ; nous aurons ainsi

$$\gamma + \delta - (\alpha+\beta) + 1 = 0,$$
$$\gamma\delta - \alpha\beta + \gamma + \delta = 0.$$

Adoptons alors les mêmes notations que dans le premier cas, nous aurons, en tout, entre les quatre racines, les six relations suivantes :

$$u + v = -\frac{b}{a}, \qquad u' + v' + uv = \frac{c}{a},$$
$$uv' + vu' = -\frac{d}{a}, \qquad u'v' = \frac{f}{a},$$
$$u - v = 1, \qquad u' - v' = v.$$

De la première et de la cinquième, nous déduisons $u$ et $v$,

$$(4)\qquad u = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}-1\right), \qquad v = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+1\right);$$

la seconde et la sixième deviennent alors

$$u' + v' = \frac{c}{a} - \frac{1}{4}\left(\frac{b^2}{a^2}-1\right), \qquad u' - v' = -\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}+1\right),$$

et donnent les valeurs de $u'$ et $v'$,

$$(5)\qquad \begin{cases} u' = \dfrac{c}{2a} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b}{a}+1\right), \\ v' = \dfrac{c}{2a} - \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right) + \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b}{a}+1\right); \end{cases}$$

il n'y a plus qu'à porter ces valeurs trouvées pour $u$, $v$, $u'$, $v'$ dans la troisième et la quatrième relation, pour avoir les conditions que nos hypothèses imposent aux coefficients, ce sont :

$$(6)\quad \begin{cases} b\left[\dfrac{c}{a}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)\right]-\dfrac{a}{2}\left(\dfrac{b}{a}+1\right)=2d, \\ \left[\dfrac{c}{a}-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b^2}{a^2}-1\right)\right]^2-\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{b}{a}+1\right)^2=\dfrac{4f}{a}. \end{cases}$$

La résolution de l'équation du quatrième degré est alors immédiate, puisque $\alpha$ et $\beta$ sont racines de l'équation du second degré $x^2-ux+u'=0$, que $\gamma$ et $\delta$ sont racines de l'équation du second degré $x^2-vx+v'=0$, et que $u$, $v$, $u'$, $v'$ sont connues, si nous supposons les relations (6) vérifiées.

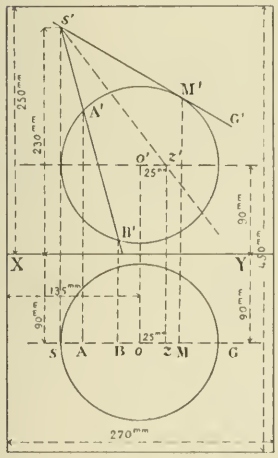
## CONCOURS DE 1895 (*Suite*).

### ÉCOLE CENTRALE

**Première Session.**

*Géométrie descriptive.*

**437.** — On considère une sphère de centre O dont la cote et l'éloignement sont fixés à $90^{\text{mm}}$, le rayon de la sphère $R = 80^{\text{mm}}$, et un cône de révolution dont le sommet $ss'$ est ainsi défini : la projetante de ce point se confond avec la tangente commune aux deux contours apparents de la sphère vers la gauche, la projection horizontale de $s$ est située sur le contour apparent de la sphère et la cote de ce point est de $230^{\text{mm}}$ au-dessus du plan horizontal de projection. L'axe de ce cône est une droite de front $sz$, $s'z'$ qui rencontre le diamètre de la sphère parallèle à la ligne de terre en un point $zz'$ situé à droite de O et à une distance de $25^{\text{mm}}$. La génératrice de front $sG$ $s'G'$ du cône s'obtient en menant de $ss'$ une tangente au grand cercle de front de la sphère dont le contact a lieu en MM'.




Cela étant, on demande :

1° De déterminer l'intersection du cône et de la sphère. On aura soin de déterminer, outre un point courant et sa tangente, les points et tangentes remarquables ;

2° De représenter le tronc de cône limité par les sections droites des points AA' et BB' où l'intersection rencontre le contour apparent vertical de la sphère en supprimant de ce tronc de cône la portion comprise dans la sphère.

*Titre extérieur :* Intersection de deux surfaces.

*Titre intérieur :* Tronc de cone entaillé par une sphere.

La ligne de terre est parallèle aux petits côtés du cadre et à $250^{\text{mm}}$ du petit côté supérieur. La projetante $oo'$ est au milieu de la feuille.

Cadre de 0,27 sur 0,45.

*2 juillet, de 7 h. à 11 h*

*Physique et Chimie.*

I. — **438.** — On forme, avec une balance juste, un baroscope. Soient P et $p$ les poids réels, V et $v$ les volumes des deux sphères à $t^0$ ; la balance étant fermée et pleine d'air sec à la température $t^0$ et sous la pression H, l'équilibre existe.

Montrer comment :

1° A température constante l'appareil peut servir de manomètre, puisque la tangente de l'angle d'inclinaison du fléau est proportionnelle à la variation de pression ;

2° A pression et à température constantes l'appareil peut servir d'hygromètre ; il suffit, en effet, pour pouvoir calculer l'état hygrométrique $e$ d'un lieu, d'ouvrir la balance pour donner libre accès à l'air humide et de déterminer les poids $\varpi$ nécessaires pour ramener l'équilibre.

3° Caculer, dans ce deuxième cas, l'état hygrométrique $e$ correspondant aux données numériques suivantes :

$d = \frac{5}{8}$ (vap. d'eau), $V = 1835^{cc},2$, $t = 27^{\circ}$, $a = 0^{gr},001293$,

$m = 0^{gr},0253$, $v = 3^{cc}$, $F_t = 26^{mm},5$, $\alpha = 0,00366$.

II. — Préparations des métalloïdes. Ecrire seulement les formules des réactions.

III. — **439.** — Dans un ballon analogue à celui de Lavoisier, on chauffe $10^{lit}$ d'un mélange d'oxygène et d'azote avec $100^{gr}$ de mercure. On arrête l'expérience quand l'absorption de l'oxygène est terminée (on la suppose complète).

Après refroidissement, on verse un excès d'acide sulfurique concentré; on chauffe jusqu'à dissolution complète et on recueille le gaz qui se dégage sur la cuve à mercure; on le mesure et on trouve $6^{lit},968$. On demande : 1° La nature du gaz recueilli ; 2° La composition centésimale, en volumes, du mélange d'oxygène et d'azote contenu dans le ballon.

Les gaz seront supposés secs et dans les conditions normales de température et de pression.

$\delta = 0,0695$, $H = 1$, $O = 16$, $S = 32$, $Hg = 200$.

*(2 juillet, de 3 h. à 5 h.)*

*Géométrie analytique.*

**440.** — On donne deux axes rectangulaires $Ox$ et $Oy$, sur l'axe des $x$ un point A d'abscisse $x = p$, sur l'axe des $y$ un point B d'ordonnée $y = q$. Ecrire l'équation générale des coniques passant par le point A, tangentes à l'axe des $y$ en B et admettant pour diamètre conjugué de $Oy$ une droite dont le coefficient angulaire est $m$.

1° Faisant varier $m$, on cherchera le lieu des centres des hyperboles équilatères qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, et le lieu du point de rencontre du diamètre conjugué de $Oy$ dans ces hyperboles avec leur tangente en A. On distinguera sur ces deux lieux les régions qui répondent à des hyperboles pour lesquelles les points A et B sont sur une même branche, de celles sur lesquelles ces points sont sur des branches différentes.

2° Faisant encore varier $m$ et considérant les paraboles qui font partie du faisceau de coniques représentées par l'équation générale, on démontrera que par un point du plan on peut faire passer trois axes de ces paraboles. On considérera les points du plan pour lesquels un des axes est parallèle à $Oy$ et on cherchera le lieu des points d'intersection des deux paraboles qui correspondent aux axes non parallèles à $Oy$.

3° On formera l'équation de la corde commune AC de ces deux paraboles et on cherchera le lieu de l'intersection d'une parallèle à cette corde menée par l'origine avec les diamètres conjugués de $Oy$ dans ces mêmes paraboles.

*(3 juillet, de 7 h. à 11 h.)*

*Calcul trigonométrique.*

**441.** — 1° Calculer les côtés et les angles du triangle ABC dans lequel on connaît la surface S, le rayon $r$ du cercle inscrit et le rayon $r'$ du cercle exinscrit situé dans l'angle A :

$S = 832^{Ha},786$, $r = 927^{m},285$, $r' = 1276^{m},475$.

2° Donner la valeur minimum de la surface S qui correspond aux valeurs numériques données pour $r$ et pour $r'$.

*(3 juillet, de 1 h. à 5 h. 1/2.)*

## QUESTION PROPOSÉE

**442.** — On prend deux axes rectangulaires $Ox$, $Oy$, et une droite D ayant pour équation $y - mx = 0$.

1° Trouver l'équation générale des hyperboles ayant pour asymptote $Oy$, et pour directrice la droite D.

2° Lieu du foyer correspondant à la directrice donnée.

3° Pour chaque position du foyer trouver le centre de la courbe ; en déduire le lieu du second foyer, et le lieu des sommets réels.

4° Par chaque position du foyer, on mène des parallèles aux asymptotes de l'hyperbole correspondante. Ces parallèles rencontrent l'hyperbole en deux points P et Q. Trouver le lieu du pôle de PQ lorsque l'on fait varier le foyer, et par suite l'hyperbole correspondante.

5° On suppose que l'on donne une position fixe du foyer, et que l'on fasse varier la direction de la droite D, en faisant varier le coefficient $m$. Trouver alors : le lieu du second foyer ; le lieu du pôle de PQ ; le lieu des sommets réels.

A. Morel.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE JACQUET.

5e Année. N° 12 Septembre 1895

# REVUE DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES

## PREMIÈRE PARTIE

### NOTE SUR LE RÉSULTANT DE DEUX ÉQUATIONS ENTIÈRES

Soient $\varphi(x) = 0$ et $\psi(x) = 0$ deux équations entières, de degrés $p$ et $m$ ; considérons une équation entière de degré $m$, quelconque, et désignons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ les $m$ racines de cette équation, par $S_1, S_2, \ldots, S_m$ les $m$ premières sommes des puissances semblables des racines. En représentant par $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m$ le premier membre de cette équation, nous aurons l'identité $x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m \equiv (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_m)$ ; d'autre part, les formules de Newton nous donnent :

$$\begin{aligned}
&S_1 + a_1 = 0,\\
&S_2 + a_1 S_1 + 2a_2 = 0,\\
&S_3 + a_1 S_2 + a_2 S_1 + 3a_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&S_m + a_1 S_{m-1} + \ldots + m a_m = 0.
\end{aligned}$$

Ce sont là $m$ équations linéaires par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_m$, dont le déterminant n'est pas nul : par suite la règle de Cramer nous donne pour valeur de $a_m$,

$$a_m = \frac{-\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & S_1 \\ S_1 & 2 & 0 & \ldots & S_2 \\ S_2 & \ldots & & & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1} & S_{m-2} & \ldots & S_1 & S_m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_{m-1} & & \ldots & m \end{vmatrix}},$$

ou

$$a_m = \frac{(-1)^m}{m!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m-1} & & & \ldots & S_1 \end{vmatrix}.$$

Mais on sait que $a_m = (-1)^m \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ ; on a donc

$$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m = \frac{1}{m!} \begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ S_m & S_{m-1} & & & \ldots & S_1 \end{vmatrix}.$$

Si maintenant l'on désigne par $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ les $m$ racines de $\psi(x) = 0$, et si l'on suppose que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, représentent les $m$ nombres $\varphi(\beta_1), \varphi(\beta_2), \ldots, \varphi(\beta_m)$, on voit de suite que l'équation

$$\begin{vmatrix} S_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ S_2 & S_1 & 2 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_m & S_{m-1} & \ldots & & S_1 \end{vmatrix} = 0$$

est la résultante des deux équations $\varphi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$. Il reste à montrer comment on peut calculer la somme $S_p = \Sigma(\varphi(\beta))^p$; pour cela, il suffit de se rappeler que si $\theta(x)$ désigne un polynome entier en $x$, quelconque, on obtient $\Sigma\theta(\beta)$ en prenant le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{\theta(x)\psi'(x)}{\psi(x)}$, ordonné par rapport aux puissances décroissantes de $x$ : $S_p$ est donc le coefficient de $\frac{1}{x}$ dans le développement de $\frac{(\varphi(x))^p\psi'(x)}{\psi(x)}$ ordonné par rapport aux puissances décroissantes de $x$.

## LEÇON SUR LES ENVELOPPES

1. Si l'on considère une équation entre $x$ et $y$, contenant un paramètre arbitraire $t$, $f(x, y, t) = 0$, elle représente, lorsque $t$ varie, une infinité de lignes courbes. Nous appellerons cet ensemble de courbes un *système* ou une *famille* de courbes.

Sur chaque courbe du système, il existe un certain nombre de points particuliers, ou mieux, des points particuliers isolés que nous allons introduire et que nous appellerons *points limites* de la courbe $(t)$ considérée. Nous verrons que ces points limites engendrent un lieu que nous appellerons *enveloppe* du système, et que nous montrerons être tangent à chacune des courbes du système aux points limites qu'elle porte ; et nous nommerons chacune des courbes du système, par rapport à leur enveloppe, une *enveloppée*.

Il y a aux raisonnements que nous allons faire diverses exceptions que nous signalerons ; il y a même des enveloppes singulières et des enveloppes exceptionnelles dont nous aurons à indiquer l'origine.

Envisageons donc une courbe $(t)$ du système donné, qui corresponde à une valeur $t$ du paramètre, et une autre courbe $(t+h)$, qui corresponde à une valeur voisine, $t+h$, de la précédente. Les deux courbes se coupent en des points qui sont donnés par les solutions du système d'équations

$$(1) \qquad f(x, y, t) = 0, \qquad f(x, y, t+h) = 0.$$

Ce système étant équivalent au système

$$(2) \qquad f(x, y, t) = 0, \qquad \frac{f(x, y, t+h) - f(x, y, t)}{h} = 0,$$

les points de rencontre sont les solutions communes aux équations (2). Quand $h$ tend vers 0, ces points, mobiles sur la courbe $(t)$, tendent vers certains points de cette courbe que nous appellerons les *points limites* relatifs à cette courbe. Ceci aura lieu si la seconde équation (2) tend vers une équation limite, quand $h$ tend vers 0, c'est-à-dire si la dérivée de $f(x, y, t)$, par rapport à $t$, existe. Les points limites sont donc définis, en général, par le système

$$(3) \qquad f(x, y, t) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0,$$

et le lieu de ces points, quand $t$ varie, quand la courbe $(t)$ se déforme et se déplace dans le plan, s'obtient, soit en éliminant $t$ entre les équations (3), soit en résolvant ces équations par rapport à $x$ et $y$.

Mais le raisonnement que nous avons fait peut ne pas donner les points limites. Il suffit, pour s'en convaincre, de remarquer qu'en remplaçant le système (1) par le système (2) et en admettant que celui-ci ait pour limite le système (3), nous avons supposé implicitement que les deux symboles fonctionnels, employés dans les équations (1), sont les mêmes. Or, ceci peut ne pas être, si la fonction $f(x, y, t)$ a plusieurs déterminations $f_1, f_2, \ldots, f_k$, et si, à chacune d'elles, correspond seulement une portion de la courbe ; car alors le point limite envisagé peut être sur l'arc $f_\mu(x, y, t) = 0$ de la courbe (1) et sur l'arc $f_{\mu'}(x, y, t+h) = 0$ de la courbe $(t+h)$, pour $h = 0$. Il est fourni alors par les deux équations $f_\mu(x, y, t) = 0$ et $f_{\mu'}(x, y, t) = 0$ ; c'est le point où ces deux arcs se raccordent, et les calculs précédents n'ont plus de sens.

Il est évident d'ailleurs que ce cas ne se présentera pas si $f(x, y, t) = 0$ est une équation algébrique et entière par rapport à $x, y, t$ ; c'est le cas qui se présente le plus fréquemment dans la géométrie des courbes algébriques.

L'exemple suivant met bien en relief l'exception que nous venons de signaler. Considérons un système de cercles tangents aux deux axes de coordonnées : $x^2 + y^2 - 2t(x+y) + t^2 = 0$ (axes rectangulaires).

L'enveloppe est alors fournie par les deux équations $f(x, y, t) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0$, ou

$$x^2 + y^2 - 2t(x+y) + t^2 = 0,$$

et

$$-(x+y) + t = 0 ;$$

et, en éliminant $t$ entre ces deux équations, on a de suite l'équation $xy = 0$, qui représente, comme il fallait s'y attendre, les deux axes de coordonnées. Maintenant, résolvons l'équation $f(x, y, t) = 0$ par rapport à $t$ ; nous aurons

$$t = x + y \pm \sqrt{2xy};$$

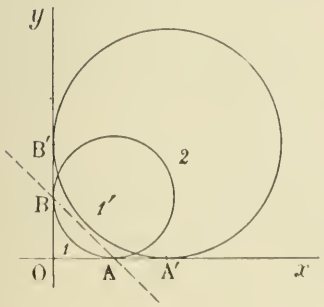
l'équation $f(x, y, t) = 0$, mise sous cette forme, ou sous la forme

$$x + y - t \pm \sqrt{2xy} = 0,$$

présente deux déterminations :

$$x + y - t + \sqrt{2xy} = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y - t - \sqrt{2xy} = 0.$$

Envisageons alors un cercle de ce système, qui réponde à une valeur positive de $t$ ; la droite $x + y - t = 0$ est la corde des contacts, AB, et cette droite divise le plan en deux régions : la région négative, qui contient le point O, et la région positive, qui ne contient pas l'origine.




La première équation représente l'arc A1B, qui est dans la région négative, et la seconde l'arc A2B, qui est dans la région positive.

Si nous considérons maintenant un autre cercle répondant à la valeur $t + h$ du paramètre, les deux points de rencontre de ce cercle avec le premier sont sur les arcs qui correspondent respectivement aux déterminations

$$x + y - t - \sqrt{2xy} = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y - t - h + \sqrt{2xy} = 0,$$

si $h$ est positif, ou sur les arcs qui correspondent aux déterminations

$$x + y - t + \sqrt{2xy} = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y - t - h - \sqrt{2xy} = 0,$$

si $h$ est négatif. Par suite, les points limites, que l'on obtient pour $h = 0$, sont les points communs aux arcs

$$x + y - t + 2\sqrt{xy} = 0 \qquad \text{et} \qquad x + y - t - \sqrt{2xy} = 0.$$

Le lieu de ces points s'obtient en retranchant ces deux équations ; on trouve ainsi $2\sqrt{2xy} = 0$ ou $xy = 0$, comme précédemment.

D'autre part, la méthode indiquée antérieurement n'eût donné ici aucun résultat, puisque la dérivée de l'une ou de l'autre détermination par rapport à $t$ est égale à 1 et ne peut s'annuler.

**2.** Nous allons justifier maintenant le nom d'*enveloppe* donné au lieu des points limites. Pour cela, nous allons montrer que l'enveloppe est tangente à chacune des enveloppées aux divers points limites qu'elle porte. A cet effet, désignons par $t_0$ le paramètre de l'enveloppée considérée et par $x_0$, $y_0$ les coordonnées de l'un des points limites qu'elle supporte ; nous aurons

$$f(x_0, y_0, t_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

En outre, nous pouvons regarder $f(x, y, t) = 0$ comme étant l'équation de l'enveloppe, pourvu que $t$ y soit remplacé par la fonction implicite que donne l'équation $\frac{\partial f}{\partial t}(x, y, t) = 0$ ; cette fonction a, en général, plusieurs déterminations, à chacune desquelles correspond une portion de l'enveloppe : l'une de ces déterminations se réduit à $t_0$ pour $x = x_0$, $y = y_0$, puisque ces trois nombres vérifient l'équation $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ; soit $\varphi(x, y)$ cette détermination particulière ; c'est celle qui correspond à l'arc de l'enveloppe passant au point-limite $(x_0, y_0)$, car on a

$$f[x_0, y_0, \varphi(x_0 y_0)] \qquad \text{ou} \qquad f(x_0, y_0, t_0) = 0.$$

La tangente à l'enveloppe en ce point est donc

$$(x - x_0)\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 + (y - y_0)\left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = 0,$$

à condition de remplacer dans les dérivées partielles $t$ par $\varphi(x, y)$, puis $x$, $y$, par $x_0$, $y_0$ ; or la substitution à $t$ de $\varphi(x, y)$, dans $\frac{\partial f}{\partial t}$, l'annule identiquement ; en outre, si l'on remplace $t$ par $\varphi(x, y)$ et que l'on n'effectue aucune simplification, $\varphi(x, y)$ prendra la valeur $t_0$ quand on remplacera $x$, $y$ par $x_0$, $y_0$ ; on aura donc finalement la tangente à l'enveloppe au point $(x_0, y_0)$, en remplaçant dans les dérivées partielles par rapport à $x$ et à $y$, $t$ par $t_0$, $x$ et $y$ par $x_0$, $y_0$ ; mais ce calcul est précisément celui qui donne la tangente à l'enveloppée au point $(x_0, y_0)$. La proposition annoncée est donc établie.

Le raisonnement que nous venons de faire est basé sur l'existence de l'équation de la tangente à l'enveloppée $(t_0)$, au point $(x_0, y_0)$. Si cette équation est indéterminée, c'est-à-dire si $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, t_0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, t_0)$ sont nuls, il n'a plus aucun sens. Mais alors le point $(x_0, y_0)$ est un point double de l'enveloppée. Voyons ce qui se passe dans ce cas.

Supposons que l'enveloppée ait toujours un point double, quel que soit $t$ ; alors les deux équations $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ont, par rapport à $x$ et $y$, une solution, $x = g(t)$, $y = h(t)$, qui appartient, quel que soit $t$, à l'équation $f(x, y, t) = 0$ ; cette équation est donc une identité en $t$ ; par conséquent sa dérivée par rapport à $t$ est identiquement nulle, et l'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} x'_t + \frac{\partial f}{\partial y} y'_t + \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0,$$

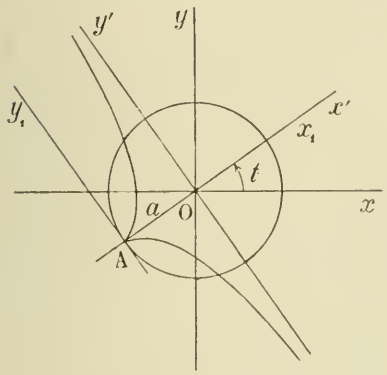
pour $x = g(t)$, $y = h(t)$ ; mais $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont identiquement nulles aussi, puisque ces valeurs de $x$ et $y$ sont une solution de ces deux équations ; donc $\frac{\partial f}{\partial t}[g(t), h(t), t] \equiv 0$. Il résulte de là que les points doubles de l'enveloppée, *qui existent quel que soit* $t$, sont des points limites. Ils décrivent des courbes que nous appellerons *enveloppes singulières*, et pour lesquelles la propriété de contact, qui a

été établie antérieurement, n'a pas lieu, en général. Si cependant la propriété de contact a lieu pour l'une des branches qui passent au point double, dans toutes les positions de l'enveloppée, le lieu du point double est une enveloppe ordinaire.

Lorsque l'enveloppée n'acquiert un point double qu'exceptionnellement, pour une valeur particulière du paramètre, ce point n'est pas forcément un point limite et tous les cas peuvent se présenter, comme il résulte aisément d'exemples simples.

Comme application des théories précédentes, nous allons chercher l'*enveloppe d'une cissoïde droite de grandeur constante, dont le point de rebroussement décrit un cercle fixe, pendant que l'asymptote tourne autour du centre de ce cercle*.

Appelons $t$ l'angle que fait la tangente de rebroussement, dirigée vers le centre, avec un demi-diamètre fixe pris pour demi-axe positif, $Ox$. L'équation de la cissoïde, dans le système $Ax_1y_1$ (voir la figure), est




$$x_1(x_1^2 + y_1^2) - ay_1^2 = 0,$$

en désignant par $a$ le rayon du cercle ; dans le système $Ox'y'$, cette équation est

$$(x' + a)^3 + y'^2(x' + a) - ay'^2 = 0,$$

ou

$$x'(x'^2 + y'^2) + 3ax'^2 + 3a^2x' + a^3 = 0.$$

On aura donc l'équation de la cissoïde dans le système fixe $Oxy$, en remplaçant dans l'équation précédente $x'$ par $x \cos t + y \sin t$, et $y'$ par $-x \sin t + y \cos t$ ; on obtient ainsi

$$(x \cos t + y \sin t)(x^2 + y^2) + 3a(x \cos t + y \sin t)^2 + 3a^2(x \cos t + y \sin t) + a^3 = 0.$$

Le premier membre de cette équation est une fonction uniforme de $x$, $y$ et $t$ ; nous pouvons donc obtenir l'enveloppe en prenant la dérivée par rapport à $t$, et en éliminant $t$ entre cette nouvelle équation et la précédente.

Nous obtenons d'abord

$$(-x \sin t + y \cos t)[x^2 + y^2 + 6a(x \cos t + y \sin t) + 3a^2] = 0;$$

cette équation se décompose en deux :

$$-x \sin t + y \cos t = 0,$$

et

$$x^2 + y^2 + 6a(x \cos t + y \sin t) + 3a^2 = 0.$$

Si l'on prend la première, l'élimination de $t$ est immédiate, car on a de suite

$$\frac{\cos t}{x} = \frac{\sin t}{y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

puis, en portant ces valeurs de $\cos t$ et $\sin t$ dans l'équation de la cissoïde,

$$\sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2 + 3a^2) + 3a(x^2 + y^2) + a^3 = 0;$$

cette équation se transforme aisément en la suivante :

$$(x^2 + y^2 - a^2)^3 = 0.$$

On a donc ainsi trois fois le lieu du point de rebroussement ; c'est évidemment une enveloppe singulière, d'après l'énoncé même de la question.

Si on prend la seconde équation

$$x^2 + y^2 + 6a(x \cos t + y \sin t) + 3a^2 = 0,$$

elle donne immédiatement

$$x \cos t + y \sin t = -\frac{x^2 + y^2 + 3a^2}{6a};$$

désignons, pour abréger, $x^2 + y^2 + 3a^2$ par $u$ et remplaçons $x \cos t + y \sin t$ par $\frac{-u}{6a}$ dans l'équation de la cissoïde, nous aurons ce qui reste à trouver de l'enveloppe

$$-\frac{u^2}{6a} + \frac{u^2}{12a} + a^3 = 0,$$

ou

$$u^2 - 12a^4 = 0.$$

Cette équation se décompose en deux autres,

$$u + 2\sqrt{3}a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad u - 2\sqrt{3}a^2 = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + (3 + 2\sqrt{3})a^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad x^2 + y^2 - (2\sqrt{3} - 3)a^2 = 0;$$

la première représente un cercle imaginaire et la seconde un cercle réel, tous deux concentriques au cercle donné. Ils constituent la véritable enveloppe.

**3.** Plaçons-nous maintenant dans le cas particulier, qui se rencontre fréquemment, le plus souvent même, où la fonction $f(x, y, t)$ est un polynome entier en $x$, $y$ et $t$, et désignons par $n$ le degré de ce polynome par rapport à $t$. Le système formé par les courbes $f(x, y, t) = 0$ est un système d'ordre $n$, c'est-à-dire que par un point du plan $(x, y)$, il passe $n$ courbes du système : en effet, l'équation $f(x, y, t) = 0$ où $x$ et $y$ désignent des nombres donnés, donne $n$ valeurs pour le paramètre $t$ : $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et, à chacune d'elles, correspond une courbe du système. Pour les points de l'enveloppe totale, c'est-à-dire du lieu total des points limites, la dérivée de cette équation entière en $t$ est aussi nulle ; l'équation $f(x, y, t) = 0$ admet une racine double, et, par suite, les points de l'enveloppe apparaissent comme étant les points du plan par lesquels passent deux courbes du système, qui sont confondues. Nous aurons donc l'équation de l'enveloppe en exprimant que l'équation entière en $t$, $f(x, y, t) = 0$, admet une racine double, c'est-à-dire que son discriminant est nul.

Cette nouvelle manière d'envisager la question conduit immédiatement à l'enveloppe, dans le cas où l'équation $f(x, y, t) = 0$ est de l'une des formes

$$At^2 + 2Bt + C = 0,$$

$$At^3 + Bt + C = 0.$$

Dans le premier cas, l'équation de l'enveloppe est

$$AC - B^2 = 0;$$

dans le second, elle se décompose en

$$A = 0 \qquad \text{et} \qquad 4B^3 + 27AC^2 = 0;$$

nous verons d'ailleurs que $A = 0$ ne fait pas partie de la véritable enveloppe et est une *enveloppe exceptionnelle*.

Dans le cas où l'équation a la forme

$$At^3 + 3Bt^2 + 3Ct + D = 0,$$

l'enveloppe a pour équation

$$(AD - BC)^2 - 4(AC - B^2)(BD - C^2) = 0;$$

enfin si l'équation donnée est de la forme

$$At^4 + 4Bt^3 + 6Ct^2 + 4Dt + E = 0,$$

l'équation de l'enveloppe est $I^3 - 27J^2 = 0$, en désignant par I et J les deux invariants fondamentaux de l'équation du quatrième degré.

**4.** Il arrive souvent qu'une courbe du système est double, c'est-à-dire telle que, pour chacun de ses points, on obtient deux fois le paramètre qui lui correspond. Alors cette courbe fait tout entière partie du lieu total des points limites. Nous lui donnerons le nom d'*enveloppe exceptionnelle*. C'est ce qui arrive, en particulier, quand on cherche l'enveloppe d'un système de droites, pour toutes les tan-

gentes inflexionnelles et tangentes multiples de l'enveloppe ordinaire, qui est alors la courbe dont le système des tangentes coïncide avec le système donné.

Voici un exemple : *Proposons-nous de chercher l'enveloppe du système de droites donné par l'équation*

$$(t^2 - 1)x + 2t^3y + t^4 + 3t^2 = 0.$$

Si nous prenons la dérivée par rapport à $t$, nous aurons, pour définir le lieu total des points limites, les deux équations

$$2tx + 6t^2y + 4t^3 + 6t^2 = 0,$$

et

$$(t^2 - 1)x + 2t^3y + t^4 + 3t = 0.$$

La première est identiquement vérifiée pour $t = 0$, et la seconde se réduit alors à $x = 0$; l'axe des $y$ est donc une première enveloppe exceptionnelle. Si on divise alors la première par $2t$, et que l'on résolve ensuite les deux équations par rapport à $x$ et $y$, on remarque que les expressions qui donnent $x$ et $y$ sont indéterminées pour $t^2 - 3 = 0$. Pour ces deux valeurs de $t$, $t = -\sqrt{3}$, $t = \sqrt{3}$, les deux équations en $x$ et $y$ représentent la même droite, à chaque fois, et les deux droites qui correspondent à ces valeurs des paramètres sont encore des enveloppes exceptionnelles; elles ont pour équations

$$x + 3\sqrt{3}\,y + 9 = 0,$$

et

$$x - 3\sqrt{3}\,y + 9 = 0.$$

La véritable enveloppe est alors fournie par les valeurs simplifiées de $x$ et de $y$, et a pour équations

$$x = t^2, \qquad y = -\frac{t^2 + 1}{t}.$$

C'est une courbe du troisième ordre qui admet pour tangentes inflexionnelles les trois droites signalées comme enveloppes exceptionnelles.

**5.** La théorie des enveloppes va nous permettre de résoudre un problème très important. Il s'agit de la discussion d'une équation entière à deux paramètres.

Désignons par $t$ l'inconnue de cette équation, par $x$ et $y$ les deux paramètres et regardons-les comme étant les coordonnées d'un point du plan ; supposons, en outre, les coefficients de l'équation réels. Les racines de l'équation en $t$, $f(x, y, t) = 0$, sont des fonctions continues des coefficients de l'équation, et, par suite, des fonctions continues de $x$ et de $y$. Il suit de là que, lorsque le point $(x, y)$ décrit un chemin continu dans le plan, les valeurs de $t$ varient d'une manière continue ; par conséquent, le nombre des racines réelles ne peut changer qu'au moment où l'équation acquiert une racine double ; car cela ne peut arriver que de deux façons : ou bien parce que deux racines, d'abord imaginaires conjuguées l'une de l'autre, deviennent réelles ; ou bien parce que deux racines, d'abord réelles, deviennent imaginaires conjuguées. Dans les deux cas, au moment du passage, les deux racines imaginaires conjuguées se réduisent à leurs parties réelles, qui sont les mêmes, et il y a une racine double.

Si l'on construit alors le lieu total des points pour lesquels il y a une racine double, c'est-à-dire le lieu total des points limites, on aura divisé le plan en régions telles, que, dans l'une d'elles, les mêmes choses se passent pour chaque point. Il suffira donc de reconnaître la nature des racines de l'équation en $t$, en un point particulier de chacune des régions.

Application. — *Discuter l'équation*

$$t^4 + 2t^3y + t^2(x + 3) - x = 0,$$

*quand le point* $(x, y)$ *se meut dans le plan.*

Nous avons trouvé que l'enveloppe totale se compose des quatre parties :

$$x = 0, \qquad x + 3\sqrt{3}\,y + 9 = 0, \qquad x - 3\sqrt{3}\,y + 9 = 0,$$

et de la courbe

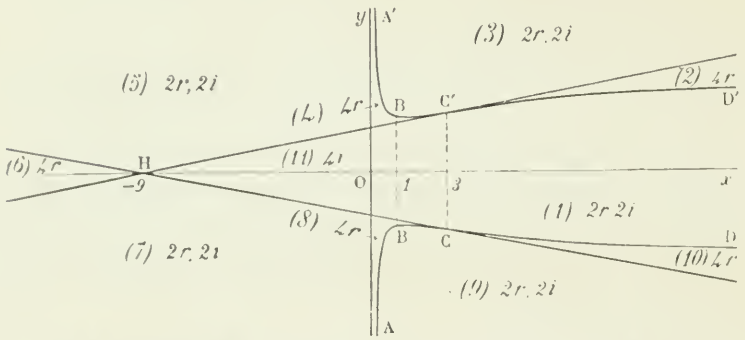
$$x = t^2, \qquad y = -\frac{t^2 + 1}{t}.$$

Construisons cette courbe, et nous placerons ensuite les trois droites trouvées, qui sont les tangentes inflexionnelles de la courbe.

Nous remarquons d'abord que, si l'on change $t$ en $-t$, $x$ ne change pas et que $y$ ne fait que changer de signe ; la courbe est donc symétrique par rapport à $Ox$, et, en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier $t$ de $0$ à $+\infty$. Dans cet intervalle, $x$ croît toujours, de $0$ à $+\infty$ ; $y$ croît depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$, il décroît ensuite ; en précisant avec les valeurs particulières de $y$, nous voyons que $y$ croît de $-\infty$ à $-2$, puis décroît de $-2$ à $-\infty$ ; il atteint son maximum $-2$ pour $t = 1$, $x = 1$. Le coefficient angulaire de la tangente est $\frac{y'}{x'} = \frac{1 - t^2}{2t^3}$ ; il est positif depuis $t = 0$ jusqu'à $t = 1$, puis négatif : il est infini pour $t = 0$, nul pour $t = 1$, et nul encore pour $t = +\infty$ ; dans l'intervalle, il passe par un minimum, $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$, pour $t = +\sqrt{3}$.

La branche infinie qui correspond aux petites valeurs de $t$ est asymptote à $Oy$ ; celle qui correspond aux valeurs infinies de $t$ est parallèle à $Ox$, et, par suite, parabolique.

La courbe est alors aisée à construire : nous avons obtenu la branche ABCD, dans le sens ABCD. Il n'y a plus qu'à achever la courbe à l'aide de la symétrie constatée au début.




Sur la figure, la courbe a été tracée en trait fort, ainsi que ses trois tangentes d'inflexion, $Ox$, HC, HC'. Nous avons ainsi divisé le plan en 11 régions numérotées ; il n'y a plus qu'à reconnaître ce qui se passe en un point de chacune d'elles.

Dans la région (1), nous prendrons un point sur $Ox$, $y = 0$, $x > 0$ ; l'équation en $t$ est alors bicarrée, $t^4 + (x + 3)t^2 - x = 0$, et admet deux racines imaginaires et deux racines réelles ; nous indiquerons ce résultat par les signes $2r$, $2i$. Nous étudierons de même les régions (11) et (6).

Dans la région (2), nous prendrons un point infiniment éloigné, situé sur la droite $y = \frac{x}{6}$ ; en ce point, l'équation se réduit à $t^3 + 3t^2 - 3 = 0$, qui a ses trois racines réelles : la racine infinie étant simple est réelle aussi ; il y a donc quatre racines réelles (symbole $4r$). Le même fait se produit dans la région (10).

Dans la région (3), nous prendrons un point infiniment éloigné, situé sur la droite $y = x$ ; en ce point, l'équation se réduit à $2t^3 + t^2 - 1 = 0$, qui a deux racines imaginaires ; il y a donc, dans toute cette région, deux racines réelles et deux racines imaginaires (symboles $2r$, $2i$). Le même fait se produit dans la région (9).

Enfin nous étudierons les régions (4) et (5) en prenant, dans la première, $x$ très petit et positif et $y = 2$, puis, dans la seconde, un point infiniment éloigné sur la droite $y = -x$. D'ailleurs on peut remarquer que la région (7) a été étudiée en même temps que la région (3) et que les régions (5) et (7) donnent les mêmes résultats, à cause de la symétrie.

6. Il nous reste, pour terminer cette étude déjà un peu longue, à parler du cas où, dans l'équation générale des courbes du système, figurent $n$ paramètres, liés entre eux par $n - 1$ relations, de telle sorte qu'il y ait, comme précédemment, un paramètre arbitraire. Soient $t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, les $n$ paramètres, liés par les $n - 1$ équations

$$g_1(t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = 0,$$
$$g_2(t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{n-1}(t, t_1, \ldots, t_{n-1}) = 0,$$

et soit
$$f(x, y, t, t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}) = 0$$
l'équation générale des courbes du système.

Nous pouvons envisager $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, comme étant des fonctions de $t$, tirées des $n-1$ relations, et appliquer la méthode générale. Nous aurons à prendre la dérivée complète de l'équation $f(x, y, t, t_1, \ldots, t_{n-1}) = 0$, par rapport à $t$, et à y remplacer les dérivées de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, par rapport à $t$, par leurs valeurs déduites des relations $g_k = 0$. Or ce calcul revient au fond à la dérivation des $n$ équations $g_k = 0$ et $f = 0$ par rapport à $t$, et à l'élimination entre les $n$ équations ainsi obtenues de $\frac{dt_1}{dt}, \frac{dt_2}{dt}, \ldots, \frac{dt_{n-1}}{dt}$.

Les dérivations indiquées donnent d'abord le système

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}}\frac{dt_{n-1}}{dt} = 0,$$
$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial g_1}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial g_1}{\partial t_{n-1}}\frac{dt_{n-1}}{dt} = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$\frac{\partial g_{n-1}}{\partial t} + \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t_1}\frac{dt_1}{dt} + \cdots + \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t_{n-1}}\frac{dt_{n-1}}{dt} = 0;$$

ensuite l'élimination des dérivées de $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$, donne le déterminant :

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial t} & \frac{\partial f}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial f}{\partial t_{n-1}} \\ \frac{\partial g_1}{\partial t} & \frac{\partial g_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial t_{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t} & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial g_{n-1}}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} = 0.$$

Il suffit de joindre cette équation aux $n$ équations $g_k = 0$, $f = 0$, et d'éliminer les paramètres $t, t_1, \ldots, t_{n-1}$, entre toutes ces équations, pour obtenir l'équation de l'enveloppe.

Dans le cas particulier où il n'y a que deux paramètres, $t$ et $t_1$, le système final se compose de trois équations

$$f(x, y, t, t_1) = 0,$$
$$g(t, t_1) = 0,$$
$$\frac{\frac{\partial f}{\partial t}}{\frac{\partial g}{\partial t}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial t_1}}{\frac{\partial g}{\partial t_1}},$$

et, en éliminant $t$ et $t_1$ entre elles, on a l'équation de l'enveloppe.

Il y a, pour ces deux cas, des applications classiques que nous ne voulons pas présenter, et des simplifications accidentelles du calcul que le lecteur trouvera indiquées dans tous les ouvrages didactiques. Cet article est déjà trop long ; il est inutile que nous entrions dans des détails connus.

E. H.

## ÉCOLE POLYTECHNIQUE (Concours de 1895).

### Mathématiques.

**426.** — *On donne : d'une part deux droites* D *et* D′ *ne se coupant pas ; d'autre part deux autres droites* Δ *et* Δ′ *ne se coupant pas. On considère une droite variable* OA *passant par l'origine* O, *et située dans le plan de coordonnées* $xOy$.

1° *Former l'équation de la surface du deuxième degré* S *qui contient* D, D′, *et* OA.

2° *La surface* S, *et la surface analogue* Σ *qui contient* Δ, Δ′ *et* OA, *se coupent, en dehors de* OA, *suivant une certaine courbe. Trouver la surface lieu géométrique de cette courbe lorsque* OA *décrit le plan* $xOy$.

3° *Déterminer les droites situées sur cette surface.*

4° *Étudier complètement cette surface dans le cas particulier où les quatre droites* D, D′, Δ *et* Δ′ *sont quatre génératrices d'un même système d'un hyperboloïde qui passe au point* O ; *et montrer que, dans ce cas, le lieu comprend un plan qui demeure invariable lorsque les quatre droites décrivent respectivement des plans passant par le point* O.

N.-B. — On conservera les notations indiquées.

**Première solution.** — Pour plus de commodité et de généralité, nous changerons les notations Δ et Δ′ en $D_1$ et $D'_1$, et nous supposerons que la droite OA décrit un plan quelconque H passant par l'origine O.

L'équation de H sera

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Les équations de D seront

$$\begin{cases} P = ax + by + cz = 0, \\ Q = \alpha x + \beta y + \gamma z + 1 = 0. \end{cases}$$

Les équations de D′, $D_1$, $D'_1$ seront de même respectivement

$$\begin{cases} P' = a'x + \cdots = 0, \\ Q' = \alpha' x + \cdots = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} P_1 = a_1 x + \cdots = 0, \\ Q_1 = \alpha_1 x + \cdots = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} P'_1 = a'_1 x + \cdots = 0, \\ Q'_1 = \alpha'_1 x + \cdots = 0. \end{cases}$$

Les équations de OA seront

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{y}{\mu} = \frac{z}{\nu},$$

avec la condition

$$A\lambda + B\mu + C\nu = 0.$$

1° L'équation d'une quadrique passant par D et D′ est de la forme

$$fPP' + gPQ' + hQP' + kQQ' = 0.$$

Écrivant que cette quadrique contient OA, on trouve sans peine

$$f = \alpha'\lambda + \beta'\mu + \gamma'\nu - (\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu),$$

$$g = -(a'\lambda + b'\mu + c'\nu), \qquad h = a\lambda + b\mu + c\nu, \qquad k = 0.$$

L'équation de S est donc

$$\lambda[(\alpha' - \alpha)PP' - a'PQ' + aP'Q] + \mu[(\beta' - \beta)PP' - b'PQ' + bP'Q] + \nu[(\gamma' - \gamma)PP' - c'PQ' + cP'Q] = 0.$$

2° L'équation de $S_1$ (qui remplace Σ) est de même

$$\lambda[(\alpha'_1 - \alpha_1)P_1P'_1 - a'_1P_1Q'_1 + a_1P'_1Q_1] + \mu[(\beta'_1 - \beta_1)P_1P'_1 - b'_1P_1Q'_1 + b_1P'_1Q_1] + \nu[(\gamma'_1 - \gamma_1)P_1P'_1 - c'_1P_1Q'_1 + c_1P'_1Q_1] = 0.$$

Le lieu de l'intersection des surfaces S et $S_1$ est donc représenté par l'équation

$$0 = \begin{vmatrix} (\alpha' - \alpha)PP' - a'PQ' + aP'Q & (\beta' - \beta)PP' - b'PQ' + bP'Q & (\gamma' - \gamma)PP' - c'PQ' + cP'Q \\ (\alpha'_1 - \alpha_1)P_1P'_1 - a'_1P_1Q'_1 + a_1P'_1Q_1 & (\beta'_1 - \beta_1)P_1P'_1 - b'_1P_1Q'_1 + b_1P'_1Q_1 & (\gamma'_1 - \gamma_1)P_1P'_1 - c'_1P_1Q'_1 + c_1P'_1Q_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}.$$

On voit tout de suite que la somme des éléments de la première ou de la seconde ligne, multipliés respectivement par $x$, $y$, $z$ est identiquement nulle ; le second membre de l'équation précédente est donc divisible par $Ax + By + Cz$, et le quotient qui, égalé à zéro, représente la surface demandée dans la seconde question, est évidemment indépendant de A, B, C. Cette surface, que nous appellerons $\Sigma$, est donc indépendante du plan H, et son équation entière peut s'écrire, par exemple, sous la forme

$$0 = \frac{1}{x}\left[\begin{array}{l}[(\beta' - \beta)PP' - b'PQ' + bP'Q](\gamma'_1 - \gamma_1)P_1P'_1 - c'_1P_1Q'_1 + c_1P'_1Q_1] \\ \qquad - (\beta'_1 - \beta_1)P_1P'_1 - b'_1P_1Q'_1 + b_1P'_1Q_1[(\gamma' - \gamma)PP' - c'PQ' + cP'Q\end{array}\right].$$

3° La surface $\Sigma$ est du troisième ordre. D'après son équation, elle contient évidemment les six droites dont voici les équations :

$$\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ Q = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P' = 0 \\ Q' = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ Q_1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P'_1 = 0 \\ Q'_1 = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P = 0 \\ P' = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P'_1 = 0 \end{array}\right\},$$

c'est-à-dire les droites D, D′, $D_1$, $D'_1$, et les deux droites C, $C_1$ menées par O et rencontrant, la première D et D′, la seconde $D_1$ et $D'_1$.

Deux cas peuvent se présenter :

**a)** Les droites C et $C_1$ sont distinctes : c'est le cas général.

Alors on voit aisément que la surface $\Sigma$ est complètement définie par la condition de contenir D, D′, $D_1$, $D'_1$, C et $C_1$. En effet, il faut 19 conditions simples pour définir une surface du troisième ordre ; d'autre part pour qu'une telle surface contienne une droite, il faut qu'elle en contienne 4 points. Comme C et $C_1$ se rencontrent, que C rencontre D et D′, et que $C_1$ rencontre $D_1$ et $D'_1$, la surface $\Sigma$ est assujettie précisément à $4 + 5 \times 3 = 19$ conditions simples.

**b)** Les droites C et $C_1$ sont confondues.

Alors, la droite C est, d'après l'équation même de $\Sigma$, ligne double sur $\Sigma$. Tout plan passant par C coupe $\Sigma$ suivant une seule droite autre que C : la surface est réglée. Outre la directrice C qui est double, elle possède une autre directrice simple, savoir la seconde droite qui rencontre les quatre droites D, D′, $D_1$, $D'_1$.

L'équation d'une surface du troisième ordre qui a pour ligne double l'axe $Ox$, par exemple, est de la forme

$$y^2(lx + my + nz + p) + z^2(l'x + m'y + n'z + p') + yz(qx + r) = 0,$$

et, par suite, il faut 9 conditions simples pour déterminer une telle surface.

Dans le cas qui nous occupe, la connaissance des quatre génératrices D, D′, $D_1$, $D'_1$ n'équivalant qu'à 8 conditions, on voit qu'il faut encore trouver une condition pour déterminer complètement la surface.

A cet effet, supposons que la droite C soit l'axe $Ox$, ce qui revient à faire $a = a' = a_1 = a'_1 = 0$. L'équation de $\Sigma$ peut s'écrire encore

$$0 = \frac{1}{z}\left[(\alpha' - \alpha)PP'[(\beta'_1 - \beta_1)P_1P'_1 - b'_1P_1Q'_1 + b_1P_1Q_1] - (\alpha_1 - \alpha_1)P_1P'_1[(\beta' - \beta)PP' - b'PQ + bP'Q]\right].$$

Les termes de degré moindre y sont

$$\frac{1}{z}\left[(\alpha' - \alpha)PP'(b_1P'_1 - b'_1P_1) - (\alpha'_1 - \alpha_1)P_1P'_1(bP' - b'P)\right]$$

ou encore

$$(\alpha' - \alpha)(b_1c'_1 - b'_1c_1)PP' - (\alpha'_1 - \alpha_1)(bc' - b'c)P_1P'_1.$$

ce qui montre que les deux plans tangents en O à la surface $\Sigma$ sont conjugués dans l'involution déterminée par les deux couples de plans

$$\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ P' = 0 \end{array}\right\} \quad \text{et} \quad \left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P'_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Telle est la condition cherchée.

Les droites situées sur $\Sigma$ sont déterminées dans le cas particulier (**b**).

Relativement au cas général (**a**), nous reprendrons la question plus loin.

4° Supposons les quatre droites $D, D', D_1, D'_1$, appartenant à une même quadrique sans se rencontrer. Alors cette quadrique fait partie de $\Sigma$, car toute droite rencontrant $D, D', D_1, D'_1$, appartient à $\Sigma$ et à la quadrique. La surface $\Sigma$ renferme donc encore un plan. Si la quadrique ne passe pas en O, les droites C et C′ sont distinctes, et par suite le plan cherché est le plan de ces deux droites. Il reste fixe si les quatre droites données décrivent respectivement des plans passant par le point O.

Si la quadrique passe en O, les droites C et $C_1$ sont confondues. On est dans le cas (**b**). La surface $\Sigma$ admet comme plans tangents en O le plan tangent à la quadrique et le plan cherché : celui-ci est donc le conjugué du plan tangent à la quadrique dans l'involution déterminée par les couples

$$\left.\begin{array}{l} P = 0 \\ P' = 0 \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} P_1 = 0 \\ P'_1 = 0 \end{array}\right\}.$$

Il ne reste fixe, lorsque les droites données décrivent respectivement des plans passant en O, que si le plan tangent à la quadrique garde lui-même une position fixe, ce qui ne résulte pas des conditions données. On voit que l'énoncé de la quatrième question peut être modifié de deux façons différentes, au choix, pour devenir exact.

5° Etudions maintenant la disposition des droites situées sur la surface $\Sigma$, dans le cas général (**a**).

Nous établirons d'abord deux lemmes :

1° *Il y a dix droites situées deux par deux dans cinq plans qui rencontrent une droite quelconque appartenant à une surface du troisième ordre $\Sigma$ non réglée.*

Supposons que la droite connue sur $\Sigma$ soit $Ox$. L'équation de $\Sigma$ est alors de la forme

$$y\varphi(x, y, z) + z\psi(x, y, z) = 0,$$

$\varphi$ et $\psi$ étant des fonctions du second degré en $x, y, z$.

Coupons $\Sigma$ par un plan passant par $Ox$, $z = \lambda y$. L'équation de la projection de la conique de section sur le plan des $xy$ est alors

$$\varphi(x, y, \lambda y) + \lambda\psi(x, y, \lambda y) = 0.$$

Le discriminant de cette équation est du cinquième degré en $\lambda$ : il y a donc cinq plans passant par $Ox$, coupant chacun $\Sigma$ suivant deux droites, C. Q. F. D.

2° *Il y a 27 droites situées sur une surface du troisième ordre non réglée, $\Sigma$.*

Considérons un plan P coupant $\Sigma$ suivant trois droites : un tel plan existe d'après ce qui précède. Toute droite située sur $\Sigma$, et en dehors de P, coupe l'une de ces trois droites; d'ailleurs, chacune de ces trois droites en rencontre dix autres, et par suite huit qui ne sont pas dans le plan P. Il y a donc $3 \times 8$ ou 24 droites situées sur $\Sigma$ en dehors de P; en tout, 27 droites sur $\Sigma$.

Ceci posé, il est facile d'énumérer les 27 droites situées sur la surface $\Sigma$ considérée plus haut.

On connaît d'abord les 6 droites $D, D', D_1, D'_1$, $C, C_1$.

Le plan $(CC_1)$ coupe $\Sigma$ suivant une droite H.

Les plans $(CD)$, $(CD')$, $(C_1D_1)$, $(C_1D'_1)$ coupent $\Sigma$ chacun suivant une nouvelle droite; soient $E, E', E_1, E'_1$, ces quatre droites.

La droite E du plan (CDE) rencontre $D_1$ et $D'_1$ qui ne rencontrent ni C ni D; de même E′

rencontre $D_1$ et $D'_1$, $E_1$ et $E'_1$, rencontrent D et D'. Le plan $(ED_1)$ coupe $\Sigma$ suivant une droite $F_1$, et le plan $(E'_1D')$ rencontre $\Sigma$ suivant une droite qui n'est autre que $F_1$ : en effet, la droite $F_1$ du plan $(ED_1F_1)$ rencontre les droites E', et D' qui ne rencontrent ni E ni $D_1$.

De même, les plans $(ED'_1)$ et $(E_1D')$ rencontrent $\Sigma$ suivant une même droite $F'_1$ ;

— $(E'D_1)$ et $(E'_1D)$ — F ;

— $(E'D'_1)$ et $(E_1D)$ — F'.

D'ailleurs, on voit comme plus haut que les quatre droites $F, F', F_1, F'_1$ rencontrent la droite H.

En tout, nous connaissons déjà 15 droites, qui sont toutes réelles, si les droites données $D, D', D_1, D'_1$ et le point O sont réels.

Il existe maintenant deux droites P et Q rencontrant les quatre droites données. Les huit plans $(PD)$, $(PD')$, $(PD_1)$, $(PD'_1)$, $(QD)$, $(QD')$, $(QD_1)$, $(QD'_1)$, déterminent dans $\Sigma$ 8 nouvelles droites $R, R', R_1, R'_1, S, S', S_1, S'_1$. D'ailleurs la droite H du plan $(CC_1H)$ rencontre P et Q, car P et Q ne peuvent rencontrer ni C ni $C_1$, puisque D et D' ne sont pas dans un même plan, et qu'il en est de même de $D_1$ et $D'_1$. Les plans $(PH)$ et $(QH)$ déterminent encore dans $\Sigma$ 2 nouvelles droites U et V.

Voilà donc 12 nouvelles droites qui complètent le nombre 27 : Ces 12 dernières droites sont réelles ou imaginaires en même temps, puisque P et Q dépendent d'une équation du second degré et que les 10 autres résultent linéairement de P et Q.

Il serait facile, pour achever de se rendre compte de la disposition des 27 droites que nous venons de trouver sur $\Sigma$, de dresser un tableau dans lequel on verrait les 10 droites, situées deux par deux sur 5 plans, qui rencontrent chacune des 27 droites de $\Sigma$. Il suffira d'appliquer toujours le même principe qui nous a déjà servi si souvent : si un plan coupe $\Sigma$ suivant trois droites, toute autre droite située sur la surface rencontre l'une de ces trois droites. H. A.

**Deuxième solution.** — Je vais démontrer que toutes les surfaces S et $\Sigma$ passent respectivement par les côtés d'un quadrilatère gauche. Pour cela, il suffit de remarquer que la génératrice d'une surface S, autre que OA, passant par le point O, doit s'appuyer sur D et D' ; cette génératrice $dd'$ est fixe. D'un autre côté, le plan $xOy$ coupant la surface S suivant une première droite OA, la coupe suivant une autre droite passant par les traces $d_1$ et $d'_1$, des droites D et D', sur le plan $xOy$. Il s'ensuit que toutes les surfaces S passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche D, D', $(dd')$, $(d_1d'_1)$. De même, on peut dire que toutes les surfaces $\Sigma$ passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche analogue, $\Delta$, $\Delta'$, $(\delta\delta')$, $(\delta_1\delta'_1)$. Un plan quelconque coupera les deux faisceaux de surfaces S et $\Sigma$ homographiques, suivant deux faisceaux de coniques C et $\Gamma$ homographiques. Les coniques C passent par quatre points fixes, intersection du plan P et du quadrilatère gauche D, D', $(dd')$, $(d_1d'_1)$. Les coniques $\Gamma$ passent aussi par quatre points fixes, intersection du plan P et du quadrilatère $\Delta$, $\Delta'$, $(\delta\delta')$, $(\delta_1\delta'_1)$. Les coniques C et $\Gamma$ engendrent donc une quartique par leur intersection ; la surface totale engendrée par l'intersection de S et de $\Sigma$ est donc du quatrième ordre. Le plan $xOy$ faisant partie du lieu, on voit en définitive que le lieu demandé sera une surface cubique, passant évidemment par les droites D, D', $\Delta$, $\Delta'$, $(dd')$, $(\delta\delta')$.

On peut du reste remarquer que ces six droites suffisent à déterminer la surface cubique. En effet, pour déterminer une pareille surface, il faut l'assujettir à dix-neuf conditions. Or chacune des droites $\Delta$, $\Delta'$, D, D' équivaut à quatre conditions ; $dd'$ fournit encore deux conditions, car cette droite rencontre déjà les deux droites D et D', enfin $\delta\delta'$ ne fournit plus qu'une seule condition, car elle rencontre les droites $\Delta$, $\Delta'$ et $dd'$. On a donc en tout dix-neuf conditions ; la donnée de ces six droites doit donc suffire pour déterminer toutes les autres droites de la surface cubique. Voici comment on peut les mettre en évidence.

Considérons le plan déterminé par la droite $dd'$ et la droite D ; il coupe la surface cubique suivant une troisième droite, $D'_1$, qui joint évidemment les traces de $\Delta$ et $\Delta'$ sur le plan. Les trois plans $[(dd'), D', (\delta\delta'), \Delta]$, $[(\delta\delta'), \Delta']$, fourniront de même trois droites $D_1$, $\Delta'_1$, $\Delta_1$, appartenant à la surface cubique et jouissant de propriétés analogues. Ensuite les deux droites $L_1$, $L'_1$, qui s'appuient sur les droites D, D', $\Delta$, $\Delta'$ appartiennent aussi à la surface. Soient $l$ et $l'$ les traces de ces deux droites sur le plan des droites $dd'$ et $\delta\delta'$ ; la droite $ll'$ est évidemment la troisième droite de la surface cubique située dans le plan de ces deux droites. Les plans $[(ll'), L_1]$ et $[(ll'), L'_1]$ coupent la surface cubique suivant deux droites L' et L qui joignent évidemment les traces des droites $D_1$, $D'_1$, $\Delta_1$, $\Delta'_1$, sur les plans correspondants. Nous constituons ainsi deux systèmes de six droites,

$$D, D', \Delta, \Delta', L, L'$$
$$D_1, D'_1, \Delta_1, \Delta'_1, L_1, L'_1.$$

tels qu'une droite de l'un des systèmes rencontre cinq autres droites appartenant à l'autre système. Ainsi la droite D rencontre toutes les droites du second système autres que $D_1$, la droite D′ toutes les droites du second système autres que $D'_1$, et ainsi de suite. Considérons alors les plans $D\Delta'_1$ et $\Delta' D_1$ ; ils se coupent suivant une droite qui, rencontrant les quatre droites D, $\Delta'_1$, $\Delta'$, $D_1$, appartient à la cubique. Or il existe autant de manières d'associer deux plans analogues, qu'il y a de manières de combiner deux à deux les six droites du premier système par exemple : On aura donc ainsi $C_6^2$ ou quinze nouvelles droites, qui, avec les droites des deux systèmes, complètent les vingt-sept droites de la surface cubique. Il est à remarquer que les droites $dd'$, $ll'$, $\delta\delta'$ comptent parmi les quinze droites ; il suffit d'associer les plans $DD'_1$ et $D_1D'$, $LL'_1$ et $L_1L'$, $\Delta\Delta'_1$ et $\Delta_1\Delta'$.

Dans le cas où les quatre droites D, D′, Δ, Δ′ sont les quatre génératrices d'un même hyperboloïde H, une génératrice du système autre que D rencontre ces quatre droites, par suite se trouve sur la surface cubique. L'hyperboloïde H fait donc partie du lieu ; en outre il reste un plan Π qui est évidemment le plan $(dd')$, $(\delta\delta')$. Or ces droites peuvent être définies comme intersection des plans OD et OD′, puis OΔ et OΔ′. Le plan Π est donc fixe quand ces plans restant fixes, les droites D, D′, Δ, Δ′ viennent à varier.

La démonstration tombe en défaut, quand l'hyperboloïde passe par le point O.

Fenet (Lycée de Lille).

## ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE. (Concours de 1895.)

### Physique.

**429.** — *Une lentille de verre est limitée d'un côté par une surface sphérique convexe de rayon* R ; *la seconde surface, de rayon* S, *passe par le centre de la première ; l'épaisseur de la lentille est donc égale à* R.

I. — *On déterminera la position de l'image d'un objet quelconque et son grossissement ;*

II. — *La lentille étant employée comme loupe, on examinera s'il est possible de trouver une position de l'œil telle que l'image paraisse achromatique.*

III. — *On déterminera les positions et grandeurs de toutes les images d'un même objet dues aux réfractions et réflexions simples ou multiples dans cette lentille.*

I. — Soient :

A le sommet de la première face,

O le sommet et E le centre de la seconde face,

PK un objet quelconque,

QL son image par réfraction dans la première face,

PK′ son image par réfraction dans la lentille,

$n$ l'indice de la lentille.

On a successivement, en prenant le point O pour origine commune des segments (voir, à ce sujet la note publiée dans le numéro du mois d'août),

$$\frac{1}{OQ} - \frac{n}{OP} = \frac{1-n}{OA}$$

et

$$\frac{n}{OQ} - \frac{1}{OP'} = \frac{n-1}{OE},$$

d'où l'on tire, en éliminant OQ,

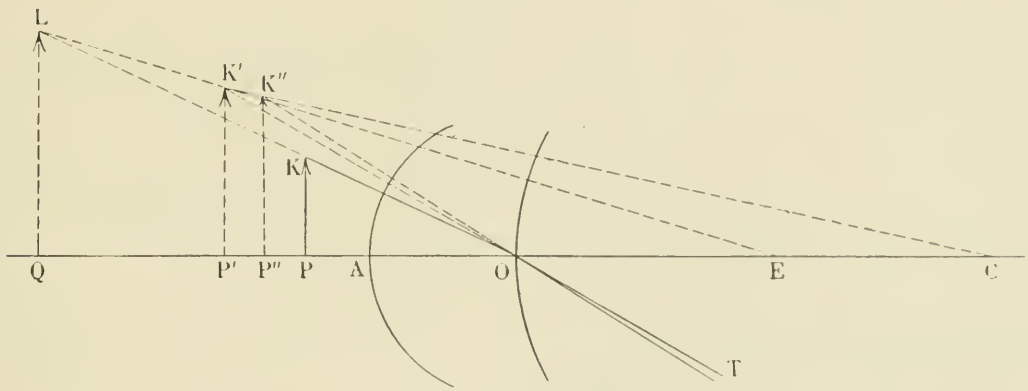
$$\frac{1}{OP'} = \frac{n^2}{OP} - (n-1)\left(\frac{n}{OA} + \frac{1}{OE}\right),$$

ou bien, en posant $OA = R$ et $EO = S$,

$$\frac{1}{OP'} = \frac{n^2}{OP} - (n-1)\left(\frac{n}{R} - \frac{1}{S}\right),$$

expression facile à discuter.

Pour avoir le grossissement, traçons le rayon KO, qui traverse la première face sans déviation et se réfracte dans la seconde suivant OT, direction sur laquelle se trouve K′. La considération des




triangles OPK et OP′K′, dans lesquels les angles en O sont petits et liés par la loi de Descartes, donne immédiatement

$$\frac{P'K'}{PK} = n\,\frac{OP'}{OP}.$$

**II.** — La lentille étant employée comme loupe, soit P′K′ l'image virtuelle rouge et P″K″ l'image virtuelle violette de l'objet PK ; la direction K″O est plus déviée que la direction K′O. L'observateur verra une image achromatique s'il peut placer l'œil au point de rencontre des directions P′P″ et K′K″ : ce point de rencontre doit, pour cela, se trouver à droite de la lentille, ce qui exige que l'on ait

$$P''K'' < P'K',$$

ou bien, en utilisant la formule du grossissement et appelant $n'$ l'indice pour le violet,

$$n'.OP'' < n.OP'.$$

En remplaçant OP′ et OP″ par leurs valeurs en fonction de OP, on trouve, tous calculs faits,

$$\frac{1}{OP} > \frac{1}{R} - \frac{1}{nn'S}.$$

L'objet étant réel, la valeur minima de OP est R ; cette valeur satisfait à la condition précédente : la valeur correspondante de OP′ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{OP'} = \frac{n}{R} + \frac{n-1}{S},$$

elle est positive et, par conséquent, acceptable.

La valeur maxima de OP, compatible avec l'achromatisme, est donnée par l'égalité

$$\frac{1}{OP} = \frac{1}{R} - \frac{1}{nn'S};$$

S étant plus grand que R, cette valeur est positive et correspond à un objet réel ; la valeur correspondante de OP′ est donnée par l'équation

$$\frac{1}{OP'} = n\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{n'S}\right) + \frac{n-1}{S},$$

elle est encore positive et acceptable.

Si l'on désigne par C la position que doit avoir l'œil, on trouve aisément

$$\frac{1}{CO} = nn'\left(\frac{1}{OP} - \frac{1}{R} + \frac{1}{nn'S}\right),$$

et les valeurs limites de CO, correspondant aux valeurs limites de OP, sont respectivement S et l'infini.

III. — Nous laissons de côté les rayons réfléchis extérieurement sur la première face : ils correspondent au cas d'un miroir sphérique ordinaire.

La réfraction en A donne l'équation déjà écrite

$$(a) \qquad \frac{1}{OQ} - \frac{n}{OP} = \frac{1-n}{OA}.$$

Une première réflexion intérieure, sur la face O, produit du point Q une image $P_1$ dont la position est donnée par l'équation

$$(1) \qquad \frac{1}{OQ} + \frac{1}{OP_1} = \frac{2}{OE}.$$

Une deuxième réflexion intérieure, sur la face A, donne une image $P_2$ telle que

$$(2) \qquad \frac{1}{OP_1} + \frac{1}{OP_2} = \frac{2}{OA},$$

et ainsi de suite.

Une $2k^{ième}$ réflexion intérieure se fait sur la face A :

$$(2k) \qquad \frac{1}{OP_{2k-1}} + \frac{1}{OP_{2k}} = \frac{2}{OA}.$$

Une $(2k+1)^{ième}$ réflexion intérieure se fait sur la face O :

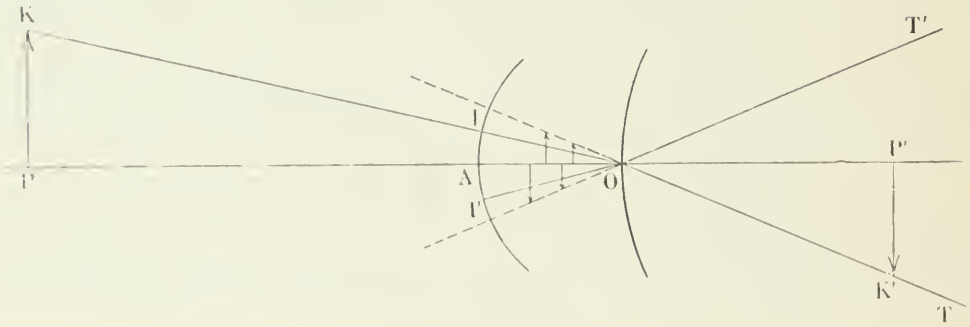
$$(2k+1) \qquad \frac{1}{OP_{2k}} + \frac{1}{OP_{2k+1}} = \frac{2}{OE}.$$

1° *Cas d'un nombre pair de réflexions intérieures.* — Les rayons, après la $2k^{ième}$ réflexion, se réfractent en O et forment l'image P' :

$$(b) \qquad \frac{n}{OP_{2k}} - \frac{1}{OP'} = \frac{n-1}{OE}.$$

Multiplions les équations de $(a)$ à $(2k)$ alternativement par $+n$ et $-n$, l'équation $(b)$ par $-1$ et ajoutons; il vient

$$\frac{1}{OP'} = \frac{n^2}{OP} - (n-1)\left(\frac{n}{R} - \frac{1}{S}\right) + 2kn\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right).$$




Supposons, en particulier, OP très grand, la valeur correspondante de OP', que nous désignerons par $f'$, est donnée par l'équation

$$\frac{1}{f'} = -(n-1)\left(\frac{n}{R} - \frac{1}{S}\right) + 2kn\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right).$$

Pour $k = 0$, $f'$ est négatif ; $k$ prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., etc., $f'$ est positif, diminue et tend vers 0.

Considérons un point K de l'objet et le rayon KIO ; les réflexions intérieures laissent ce rayon sur l'une des directions symétriques OI et OI' et, quand il se réfracte en O, c'est suivant l'une des directions symétriques OT et OT'. Les images du point K correspondant à 0, 2, 4, ..., etc., réflexions intérieures sont donc alternativement sur l'une et sur l'autre de ces deux directions. Les images de l'objet

peuvent être droites ou renversées, et leur grossissement est donné par la formule générale

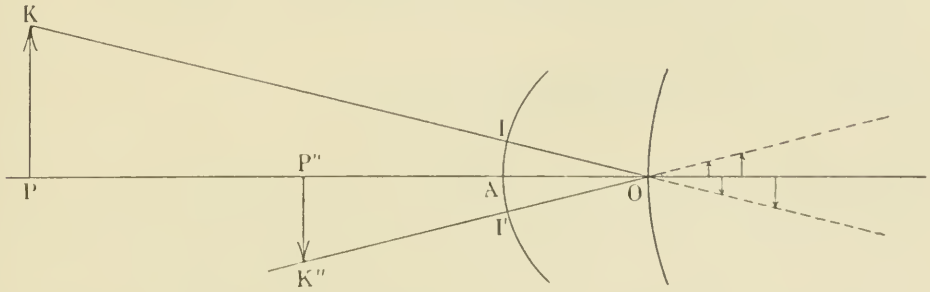
$$\frac{P'K'}{PK} = \pm n \frac{OP'}{OP}.$$

2° *Cas d'un nombre impair de réflexions intérieures.* — Les rayons, après la $(2k+1)^{ième}$ réflexion, se réfractent en A et forment l'image P″ :

$$(c) \qquad \frac{n}{OP''} - \frac{1}{OP_{2k+1}} = \frac{n-1}{OA}.$$

Multiplions les équations de $(a)$ à $(2k+1)$ alternativement par $-1$ et $+1$, l'équation $(c)$ par $+1$ et ajoutons, il vient

$$\frac{1}{OP''} = -\frac{1}{OP} + \frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{R} - \frac{1}{S}\right) - \frac{2k}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right).$$




La seconde distance focale, en particulier, est donnée par l'équation

$$\frac{1}{f''} = \frac{2}{n}\left(\frac{n-1}{R} - \frac{1}{S}\right) - \frac{2k}{n}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{S}\right).$$

Pour $k = 0$, $f''$ peut être positif ou négatif ; $k$ prenant les valeurs 1, 2, 3, ..., etc., $f''$ est négatif, diminue en valeur absolue et tend vers 0.

Le rayon KIO ne peut émerger, après un nombre impair de réflexions, que suivant les directions symétriques OI et OI′, les images successives d'un objet peuvent être droites ou renversées, et leur grossissement est donné par la formule

$$\frac{P''K''}{PK} = \pm \frac{OP''}{OP}.$$

C. R.

A résolu la question : M. Harmegnies, lycée de Douai.

## QUESTIONS POSÉES AUX EXAMENS ORAUX

### École Polytechnique (1894) (*suite*).

ALGÈBRE.

**231.** — Lorsqu'un déterminant d'ordre impair est symétrique gauche, il est identiquement nul. (L.)

**232.** — Décomposer la fraction $\frac{x^3+2}{(x-1)^3(x+1)^3}$ en éléments simples. (P.)

**233.** — Écrire $y = \frac{x^m - 1}{x-1}$. Quelle sorte de fonction est-ce ? Étudier les variations de cette fonction quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$. Pour $x$ positif que peut-on dire relativement au polynome ? Quand $m$ augmente indéfiniment par valeurs paires, comment se déforme la courbe représentative entre $-1$ et $+1$ ? (P.)

**234.** — Formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Quelles sont les formules qui leur correspondent en trigonométrie rectiligne ? En déduire ces dernières. (C.)

**235.** — Résoudre l'équation $a \sin x + b \cos x = c$. Conditions de réalité. (C.)

**236.** — Chercher un polynome entier en $x$ de degré $m$ au plus qui, pour $m+1$ valeurs de la variable, prenne $m+1$ valeurs données. Expression générale des polynomes de degré quelconque répondant à la question. (F.)

**237.** — Étudier la variation de $y = \frac{\log_a x}{x}$. (P.)

**238.** — Calculer $\sin \frac{a}{5}$ en fonction de $\cos a$. (L.)

**239.** — Valeur de $\operatorname{tg} \frac{a}{7}$ lorsqu'on donne $\sin a$. (P.)

**240.** — On demande une relation entre $\operatorname{tg} \frac{a}{6}$ et $\cos a$. Vérifier trigonométriquement les résultats. Algébriquement $\operatorname{tg} \frac{a}{6}$ est donnée par une équation du 6e degré ; trouver les trois racines positives de cette équation. Faire correspondre les racines trouvées aux arcs qui sont donnés par la trigonométrie. (P.)

**241.** — Séparer les racines de l'équation $x = \operatorname{tg} x$. Peut-on appliquer le théorème de Rolle ? (P.)

**242.** — Conditions pour qu'une équation du 7e degré ait une racine double et une racine triple. (L.)

**243.** — Variation de $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$. (P.)

**244.** — Décomposer en fractions simples la fraction

$$\frac{x^4 - 3}{(x-1)^3(x^2+2x+2)}.$$ (P.)

**245.** — Variation de $y = e^{\frac{3x^2+p}{x^3+px+q}}$. Tangente aux points où la courbe rencontre $Ox$. (P.)

**246.** — Quelle est la règle de L'Hopital ? Supposons que le rapport des dérivées premières soit indéterminé ; que faut-il faire ? (L.)

**247.** — Dérivée de $\operatorname{arc\,sin}(3x - 4x^3)$. Relation entre $\operatorname{arc\,sin}(3x-4x^3)$ et $\operatorname{arc\,sin} x$. (L.)

**248.** — Arrangements avec répétition. (L.)

**249.** — Permutations complètes, combinaisons complètes. (L.)

**250.** — Quelle relation doit exister entre les raisons $r$ et $q$ des deux progressions qui servent à définir un système de logarithmes pour que la base du système soit un nombre donné ? (P.)

**251.** — Variations de $y = \frac{\mathrm{L}x}{1 + x - \mathrm{L}x}$. Tangente au point de la courbe situé sur $Oy$. (P.)

**252.** — Exprimer que l'équation $x^3 + px^3 + q = 0$ a trois racines réelles. (F.)

**253.** — $x$ est le nombre de chiffres d'un nombre $y$ (partie entière). Limite de $\frac{x}{y}$ lorsque $y$ devient infini. (L.)

**254.** — Comment trouve-t-on le nombre des racines distinctes d'une équation ? (P.)

**255.** — Calculer les différences successives de $x^m$, quand $x$ croît par intervalles égaux. (L.)

**256.** — Différentielle d'une fonction composée $y = f(u, v)$, $u$ et $v$ étant deux fonctions de $x$. (P.)

**257.** — Étudier la série

$$\frac{1}{2\mathrm{L}2} + \frac{1}{3\mathrm{L}3} + \ldots + \frac{1}{n\mathrm{L}n} + \ldots$$

Parler des diverses règles de convergence des séries. (P.)

**258.** — Appliquer le théorème de Rolle à l'équation bicarrée. (F.)

**259.** — Variations de $y = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x + \sqrt{1 - x^2}}$. (L.)

**260.** — Limite de $\left(\cos \frac{a}{x}\right)^{x^2}$ quand $x$ devient infini. (L.)

**261.** — Calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{x^2 dx}{u^2}$, $u$ étant égal à $x \sin x + \cos x$. (L.)

**262.** — Variations de $y = xe^{x^3+px+q}$. (P.)

**263.** — Qu'appelle-t-on éliminer une inconnue entre deux équations $f(x) = 0$ et $\varphi(x) = 0$ ? Montrer que le déterminant d'Euler est identique au résultant donné par la méthode des fonctions symétriques. (C.)

**264.** — Trouver toutes les fonctions continues telles que

$$\varphi(x, y) = \varphi(x) + \varphi(y).$$ (L.)

**265.** — Étude de la série dont le terme général est

$$u_n = \frac{2n+1}{n!}.$$ (L.)

## QUESTIONS PROPOSÉES

**443.** — L'équation $\frac{z^2}{2k^2} = \text{arc cot}\,\frac{y}{x} + \Phi(x^2+y^2)$, dans laquelle $k^2$ est une constante et $\Phi$ une fonction arbitraire, représente une infinité de surfaces $\Sigma$ rapportées à trois axes rectangulaires OXYZ. En chaque point M d'une surface $\Sigma$ on mène la normale et la parallèle à OZ qui coupent le plan XOY aux points P, Q. Démontrer que la surface du triangle OPQ est constante.

(P. Puig.)

**444.** — L'équation $\frac{z^3}{3k^3} = \text{arc cot}\,\frac{y}{x} + \Phi(x^2+y^2)$ représente une infinité de surfaces $\Sigma$ rapportées à trois axes rectangulaires OXYZ. En chaque point M d'une surface $\Sigma$ on mène la normale et la parallèle à OZ qui coupent le plan XOY aux points P, Q. Démontrer que le volume du tétraèdre MOPQ est constant.

(Id.)

# DEUXIÈME PARTIE

## ALGÈBRE

**408.** — *On demande de démontrer que les trois racines de l'équation*

$$x^3 + 27px^2 + qx + 9pq - 1458p^3 = 0$$

*sont en progression arithmétique, et de résoudre cette équation.*

Nous allons montrer qu'on peut déterminer deux nombres $a$ et $r$ tels que les trois racines de l'équation soient $a - r$, $a$, $a + r$.

En effet les relations entre les coefficients et les racines peuvent s'écrire

$$3a = -27p,$$
$$3a^2 - r^2 = q,$$
$$a(a^2 - r^2) = 1458p^3 - 9pq\,;$$

tout revient à établir que ces trois équations sont vérifiées par un système de valeurs de $a$ et $r$.

Les deux premières donnent

$$a = -9p, \qquad r^2 = 243p^2 - q\,;$$

et ces deux valeurs vérifient la troisième équation, ce qui démontre la proposition.

Les trois racines de l'équation sont alors

$$-9p - \sqrt{243p^2 - q}, \qquad -9p, \qquad -9p + \sqrt{243p^2 - q}.$$

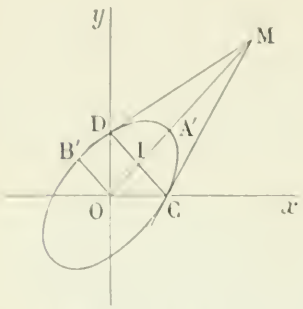
Henri BONNARD, lycée de Bordeaux.

Ont résolu cette question : MM. E.-N. Barisien ; Jean Bonneau, lycée de Toulouse ; Ch. Lagier, à Briançon ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; Georges Loederich ; J. Mossery, élève à l'école des ponts-et-chaussées ; F. Pegorier, répétiteur au collège de Cette ; G.-A. Pouilliart, à Joigny ; P. Sabot et J. Goujon, pensionnat de Valbenoîte, à Saint-Étienne ; Nambeu.

## GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE

**401.** — *Une ellipse tourne autour de son centre, et, aux points où deux droites rectangulaires issues du centre la rencontrent, on lui mène des tangentes; trouver le lieu du point de concours de ces tangentes.*

Prenons pour axes les droites rectangulaires données ; considérons un point M du lieu ; la droite




OM rencontre l'ellipse en un point A′ et la corde des contacts au point I. Menons OB′ parallèle à CD; OA′ et OB′ sont deux diamètres conjugués ; en désignant par $a'$ et $b'$ leurs longueurs, on a, puisque l'ellipse est de grandeur constante,

$$a'^2 + b'^2 = k^2,$$

$$a'b' \sin \theta = m^2 \qquad (\theta = \widehat{DIO}).$$

Soient $\rho$ et $\omega$ les coordonnées polaires du point M, $OM = \rho$, $\widehat{IOC} = \omega$ ; comme le triangle OIC est isocèle, on a $\theta = 2\omega$. De plus

$$OI \times \rho = a'^2.$$

Il est facile de calculer OI ; si l'on rapporte l'ellipse aux axes OA′ et OB′, les coordonnées du point D sont égales à OI ; on a donc

$$\overline{OI}^2\left(\frac{1}{a'^2} + \frac{1}{b'^2}\right) = 1,$$

$$\overline{OI}^2 = \frac{a'^2 b'^2}{a'^2 + b'^2},$$

ce qui peut s'écrire, en tenant compte des relations précédentes,

$$\overline{OI}^2 = \frac{m^4}{k^2 \sin^2 2\omega} \qquad \text{ou} \qquad OI = \frac{m^2}{k \sin 2\omega},$$

et par suite

$$\frac{m^2 \rho}{k \sin 2\omega} = a'^2.$$

On aura l'équation du lieu en coordonnées polaires en éliminant $a'$ et $b'$ entre les équations

$$a'^2 + b'^2 = k^2, \qquad a'b' \sin 2\omega = m^2, \qquad \frac{m^2 \rho}{k \sin 2\omega} = a'^2.$$

Cette élimination ne présente pas de difficulté ; la dernière équation donne $a'^2$ ; on déduit de la première

$$b'^2 = k^2 - a'^2 = \frac{k^3 \sin 2\omega - m^2 \rho}{k \sin 2\omega},$$

et, en remplaçant dans la deuxième,

$$\frac{m^2 \rho (k^3 \sin 2\omega - m^2 \rho)}{k^2} = m^4,$$

ou

$$m^2 \rho^2 - k^3 \rho \sin 2\omega + k^2 m^2 = 0.$$

On voit aisément que cette équation représente une courbe symétrique par rapport aux deux axes $Ox$ et $Oy$ et par rapport aux bissectrices de ces axes ; il suffira donc de faire varier $\omega$ de 0 à $\frac{\pi}{4}$.

Pour que $\rho$ soit réel, on doit avoir

$$k^6 \sin^2 2\omega - 4k^2 m^4 > 0$$

d'où l'on tire, en supposant $\sin 2\omega$ positif,

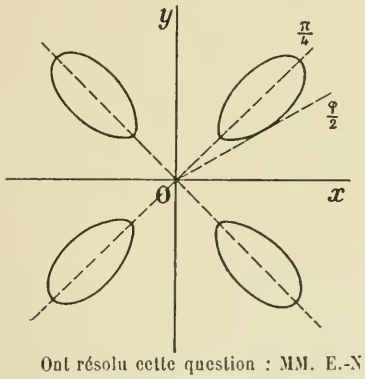
$$\sin 2\omega > \frac{2m^2}{k^2}.$$

Or le second membre est plus petit que 1, car on a

$$m^2 = ab, \qquad k^2 = a^2 + b^2,$$

$a$ et $b$ étant les demi-axes de l'ellipse ; il existe donc un angle $\varphi$ compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ et tel que l'on ait

$$\sin \varphi = \frac{2ab}{a^2 + b^2}.$$




L'inégalité précédente devient donc

$$\omega > \frac{\varphi}{2};$$

et pour que $\rho$ soit réel, il faut faire varier $\omega$ de $\frac{\varphi}{2}$ à $\frac{\pi}{4}$. En achevant par symétrie, on obtient la forme ci-contre. En coordonnées rectilignes, l'équation de cette courbe est

$$m^4(x^2+y^2)(x^2+y^2+m^2)^2 - 4k^6x^2y^2 = 0.$$

B. CHAMPION, lycée d'Orléans.

Ont résolu cette question : MM. E.-N. Barisien ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette.

---

**407.** — *On considère un rectangle* ABCD, *dont les côtés sont respectivement parallèles aux axes de coordonnées, et dont les diagonales passent par l'origine. L'un des sommets,* A, *de ce rectangle a pour coordonnées* $a$, $b$.

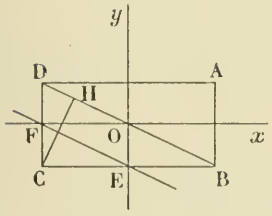
1° *Trouver l'équation générale des hyperboles équilatères qui passent par les trois autres sommets* B, C, D *de ce rectangle. Lieu des centres de ces hyperboles.*

2° *Par l'origine des coordonnées on mène des parallèles aux asymptotes. Chacune de ces parallèles rencontre l'hyperbole en un point ; soient* M *et* N *ces deux points. Équation de la droite* MN.

3° *Trouver le lieu de l'intersection de* MN *avec la ligne* PQ, *qui joint les points de contact des tangentes issues de* A.

4° *On prend l'une quelconque des hyperboles précédentes ; le diamètre de cette hyperbole qui passe par le point* C$(-a, -b)$ *rencontre la ligne* MN *en* R, *et* PQ *en* S. *On demande le lieu de* R *et le lieu de* S.

1° Toutes les hyperboles équilatères circonscrites au triangle BCD sont tangentes en C à la hauteur CH ; l'équation de cette droite étant




$$ax - by + a^2 - b^2 = 0,$$

on en conclut que l'équation générale des hyperboles est

$$f(x, y) = \lambda(x+a)(y+b) + (bx+ay)(ax-by+a^2-b^2) = 0.$$

On aura le lieu des centres de ces courbes en éliminant $\lambda$ entre les deux équations

$$f'_x = \lambda(y+b) + b(ax-by+a^2-b^2) + a(bx+ay) = 0,$$
$$f'_y = \lambda(x+a) + a(ax-by+a^2-b^2) - b(bx+ay) = 0,$$

ce qui donne

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0;$$

cette équation représente le cercle passant par les milieux des côtés du triangle BCD, c'est-à-dire le cercle des neuf points de ce triangle. C'est un résultat bien connu.

2° L'équation des parallèles aux asymptotes menées par l'origine est

$$\lambda xy + (bx+ay)(ax-by) = 0;$$

en la retranchant de l'équation de l'hyperbole, on a l'équation de la droite MN :

(1) $$\lambda(bx+ay+ab) + (a^2-b^2)(bx+ay) = 0.$$

3° La droite PQ est la polaire du point A ; elle a pour équation

(2) $$\lambda(bx+ay+2ab) + ab(ax-by+a^2-b^2) + (a^2-b^2)(bx+ay) = 0.$$

En éliminant $\lambda$ entre ces deux dernières équations, nous aurons le lieu du point de rencontre des droites MN et PQ.

On obtient après un calcul facile

$$(ax - by)(ay + bx + ab) - ab(a^2 - b^2) = 0;$$

cette équation représente une hyperbole équilatère ayant pour asymptotes la droite EF qui joint les milieux des côtés BC et CD et la perpendiculaire à cette droite passant par l'origine. En outre on reconnaît aisément que cette hyperbole passe par le point C.

4° Un diamètre quelconque de l'hyperbole

$$\lambda(x + a)(y + b) + (bx + ay)(ax - by + a^2 - b^2) = 0$$

a pour équation

$$\lambda(y + b) + b(ax - by + a^2 - b^2) + a(bx + ay) + m[\lambda(x + a) + a(ax - by + a^2 - b^2) - b(bx + ay)] = 0;$$

écrivons que ce diamètre passe par le point C, nous avons $m = \frac{a}{b}$; en transportant cette valeur dans l'équation du diamètre, on a

$$(3) \qquad \lambda(ax + by + a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)(ax - by + a^2 - b^2) = 0.$$

Le lieu du point R s'obtient en éliminant $\lambda$ entre les équations (1) et (3); il vient immédiatement

$$\frac{bx + ay + ab}{ax + by + a^2 + b^2} = \frac{(a^2 - b^2)(bx + ay)}{(a^2 + b^2)(ax - by + a^2 - b^2)},$$

ce qui peut s'écrire

$$2(b^2x^2 - a^2y^2) + (a^2 + b^2)(ax - by + a^2 - b^2) = 0.$$

C'est l'équation d'une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux diagonales du rectangle et qui passe par les points de rencontre de ces diagonales avec la droite CH.

Enfin, on aura le lieu du point S en éliminant $\lambda$ entre les équations (2) et (3); on obtient

$$\frac{bx + ay + 2ab}{ax + by + a^2 + b^2} = \frac{ab(ax - by + a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)(bx + ay)}{(a^2 + b^2)(ax - by + a^2 - b^2)},$$

et en réduisant

$$(2b^2 - a^2)x^2 - (2a^2 - b^2)y^2 + 2ab(bx - ay) + a^4 - b^4 = 0.$$

Ce lieu est une conique; $a$ étant plus grand que $b$, la conique est une ellipse si $a$ est plus grand que $b\sqrt{2}$, une hyperbole si $a < b\sqrt{2}$ et une parabole si $a = b\sqrt{2}$.

A. LAUREAUX, lycée de Besançon.

Ont résolu cette question : MM. F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette; G.-A. Pouilliart, à Joigny; Roger Varigault, soldat au 131e de ligne.

---

**414.** — *Soit un angle* XOY *et un point* P *de son plan. Par les points* O *et* P *on fait passer une circonférence de cercle variable coupant les côtés de l'angle aux points* A *et* B. *Trouver le lieu de l'orthocentre du triangle* ABO.

Prenons pour axes les côtés de l'angle donné; un cercle quelconque passant par l'origine a pour équation

$$x^2 + 2xy\cos\theta + y^2 - \lambda x - \mu y = 0;$$

il rencontre $Ox$ au point $A(\lambda, 0)$ et $Oy$ au point $B(0, \mu)$. En écrivant que ce cercle passe par le point $P(\alpha, \beta)$, on a

$$\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2 - \lambda\alpha - \mu\beta = 0.$$

Les hauteurs du triangle ABO menées par les points A et B ont pour équations respectivement

$$(x - \lambda)\cos\theta + y = 0,$$
$$(y - \mu)\cos\theta + x = 0;$$

en éliminant $\lambda$ et $\mu$ entre ces trois dernières équations, on aura l'équation du lieu; on obtient

$$\alpha(x\cos\theta + y) + \beta(y\cos\theta + x) - \cos\theta(\alpha^2 + 2\alpha\beta\cos\theta + \beta^2) = 0.$$

Le lieu est une droite.

**Solution géométrique.** — Abaissons du point P les perpendiculaires PC sur OA et PD sur

OB. La droite CD est la droite de Simson relative au point P et au triangle ABO. Or on sait que si l'on joint le point P à l'orthocentre H du triangle, le milieu de PH est sur la droite de Simson. La droite CD étant fixe, le lieu du point H est une parallèle à CD.

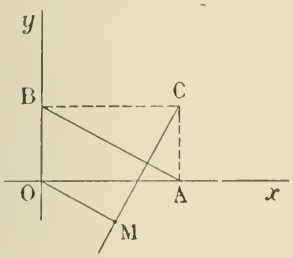
XAMBEU.

Ont résolu cette question : MM. L. Bailly, lycée de Dijon ; Henri Bonnard, lycée de Bordeaux ; A. Laureaux, lycée de Besançon ; F. Pégorier, répétiteur au collège de Cette ; G. A. Pouilliart, à Joigny ; P. Sabot, à Saint-Etienne ; Henri Vilain, 8e régiment d'artillerie.

---

**419.** — *On donne un angle droit $xOy$, et l'on inscrit dans cet angle un rectangle dont la seconde diagonale est à une distance fixe du point O. On demande le lieu du point de concours de la parallèle à cette diagonale menée par le point O avec la perpendiculaire abaissée du sommet opposé sur la même diagonale.*

Soit OACB le rectangle variable considéré dans une de ses positions ; désignons par $\alpha$ et $\beta$ les valeurs algébriques des deux segments OA et OB ; les coordonnées du point C sont alors $\alpha$ et $\beta$,




l'équation de la droite AB est $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}-1=0$, et, par suite, celle de la parallèle OM menée par le point O à AB est $\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0$ ; on obtient immédiatement l'équation de la perpendiculaire menée par le point C à cette droite et l'on trouve ainsi la nouvelle équation $\alpha(x-\alpha)-\beta(y-\beta)=0$. Exprimons enfin que l'origine est à une distance constante de la droite AB : nous aurons, en désignant cette distance par $a$,

$$\frac{\alpha\beta}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}=a,$$

ou

$$a^2(\alpha^2+\beta^2)=\alpha^2\beta^2.$$

Pour obtenir le lieu demandé, il nous reste à éliminer $\alpha$ et $\beta$ entre les trois équations

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}=0,$$

$$\alpha(x-\alpha)-\beta(y-\beta)=0,$$

et

$$a^2(\alpha^2+\beta^2)-\alpha^2\beta^2=0.$$

Or la première équation nous donne de suite

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{-y};$$

d'autre part, la seconde équation contient, en dehors des deux parenthèses, $\alpha$ et $\beta$ d'une façon linéaire et homogène ; en les remplaçant aussi par les quantités proportionnelles $x$ et $-y$, cette seconde équation devient

$$\alpha x+\beta y=x^2+y^2;$$

il n'y a plus, dès lors, qu'à multiplier les deux rapports précédents haut et bas et respectivement par $\alpha$ et $\beta$ et les ajouter pour avoir les valeurs de $\alpha$ et $\beta$ ; on obtient ainsi

$$\frac{\alpha}{x}=\frac{\beta}{-y}=\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}.$$

En portant ces valeurs dans l'équation

$$a^2(\alpha^2+\beta^2)=\alpha^2\beta^2,$$

on a finalement l'équation du lieu

$$(1)\qquad x^2y^2(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)^2.$$

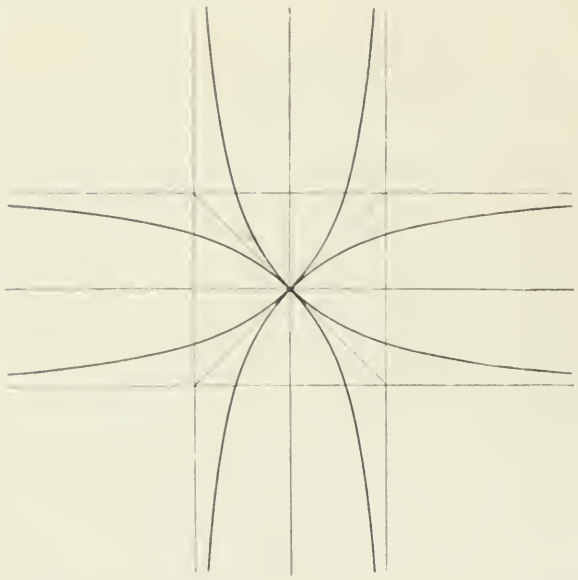
Pour construire cette courbe, nous transformerons l'équation en coordonnées polaires, en posant $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$ ; nous aurons ainsi

$$\rho^2\sin^2\omega\cos^2\omega=a^2\overline{\cos 2\omega}^2;$$

nous obtenons ainsi les deux équations

$$\rho=2a\cot 2\omega \qquad \text{et} \qquad \rho=-2a\cot 2\omega.$$

Il est facile de montrer que ces deux équations représentent la même courbe. En effet, si nous considérons pour la première équation la direction $\omega$ et pour la seconde la direction $\pi+\omega$, nous obtenons deux valeurs de $\rho$ égales et de signes contraires, et par conséquent le même point. Il suffit donc d'étudier la première équation. Cette équation ne contenant que les lignes trigonométriques de l'angle $\omega$, on aura toute la courbe en faisant varier $\omega$ dans un intervalle total égal à $2\pi$, par exemple de $-\pi$ à $+\pi$; or si l'on change $\omega$ en $-\omega$, $\rho$ ne fait que changer de signe; il en résulte que la courbe est symétrique par rapport à $Oy$; en tenant compte de cette symétrie, il suffit donc de faire varier $\omega$ de $0$ à $\pi$; si l'on change maintenant $\omega$ en $\pi-\omega$, $\rho$ ne fait encore que changer de signe; ce résultat indique une symétrie par rapport à $Ox$, et en tenant compte de cette symétrie, il suffit de faire varier $\omega$ de $0$ à $\frac{\pi}{2}$.



Dans cet intervalle, la cotangente de $2\omega$ décroît de $+\infty$ à $-\infty$, elle passe par $0$ pour $\omega=\frac{\pi}{4}$. Mais on peut encore abaisser cet intervalle et montrer qu'il suffit de faire varier $\omega$ de $0$ à $\frac{\pi}{4}$; car si on change $\omega$ en $\frac{\pi}{2}-\omega$, $\cot 2\omega$ change encore de signe, par suite aussi $\rho$, et ceci indique encore une symétrie par rapport à la seconde bissectrice.

La distance à l'origine de l'asymptote parallèle à $Ox$ s'obtient en cherchant la limite de $\rho \sin\omega$ ou de $\frac{a\cos 2\omega}{\cos\omega}$, pour $\omega=0$; cette limite est égale à $a$. Comme, d'autre part, cette quantité est plus petite que $a$, pour les petites valeurs positives de $\omega$, la courbe est au-dessous de son asymptote, et ce que nous avons dit suffit à la tracer entièrement.

Ont résolu cette question : MM. E. N Barisien; Henri Bonnard, lycée de Bordeaux; Mario Guesde; G. Lederich, à Rouen; J. Marchal; F. Pégorier, collège de Cette; G. A. Pouillart, à Joigny; P. Sabot, pensionnat Valbenoîte, Saint-Etienne; Xambeu, collège Chaptal.

## QUESTIONS PROPOSÉES

**445.** — On considère une hyperbole équilatère et deux droites conjuguées par rapport à cette hyperbole et rectangulaires entre elles. On demande de montrer :

1° Que l'enveloppe de l'une des droites, D, est une parabole, quand la seconde, $D_1$, tourne autour d'un point fixe P;

2° Que si P décrit un cercle passant au centre de l'hyperbole, le foyer de la parabole décrit une droite.

3° Trouver l'enveloppe de cette droite quand le centre du cercle décrit l'hyperbole donnée.

E. Berthelot.

**446.** — Lieu du milieu d'une corde constante inscrite dans une parabole donnée.

L. Messent.

**447.** — Un cercle C′ roule sur un autre, C, fixe, qui lui est égal. Soient M′ un point fixe sur C′, M son correspondant en C. La droite MM′ coupant C en A, C′ en A′, on joint M′, A avec le point N de contact de deux cercles; on demande :

1° De démontrer que le triangle M′NA est rectangle;

2° D'en déduire le lieu du point M′. (Ce lieu n'est pas une conique.)

S. Chassiot, Collège Chaptal.

BAR-LE-DUC. — IMP. COMTE-JACQUET.

*Le Rédacteur-Gérant :* H. VUIBERT.

QA
1
R486
année 5

Revue de mathématiques
spéciales

Physical &
Applied Sci.
~~Serials~~

Mat

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY